Proposta de Exame Final Nacional do Ensino Secundário

Prova Escrita de Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração da Prova: 150 minutos

Tolerância: 30 minutos

Data:

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na sua folha de respostas, o número de cada item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Uma turma do 12.º ano é constituída por 12 raparigas e 10 rapazes, todos com alturas diferentes.

De quantas maneiras se podem dispor os alunos da turma, em fila, de modo que os rapazes fiquem dispostos por ordem crescente (juntos ou separados) e as raparigas por ordem decrescente (também juntas ou separadas) das respetivas alturas?

(A) ${}^{22}C_{10} \times {}^{22}C_{12}$ **(B)** ${}^{22}C_{12}$

(C) ${}^{22}A_{12} \times 10!$ **(D)** $12! \times 10!$

2. Seja S o espaço de resultados (finito) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

- $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}9$
- $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}5$
- A probabilidade do acontecimento A é o dobro da probabilidade do acontecimento B.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) 0,1 **(B)** 0,2 **(C)** 0,4 **(D)** 0,6

3. Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que:

- $f(0) = f'(0) = 2$
- $g(x) = \dfrac{e^{4x} + 5}{f(x)}$

Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0?

(A) $y = -x + 3$ **(B)** $y = -x + 2$

(C) $y = 2x + 2$ **(D)** $y = 2x + 3$

4. Sejam a, b e c números reais positivos diferentes de 1 tais que $\log_a b = -\frac{1}{2}$ e $\log_c b = \frac{1}{3}$.

Qual é o valor de $\log_b c - \log_b a$?

(A) $-\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{5}{6}$ **(C)** 1 **(D)** 5

5. Admita que (u_n) é uma sucessão de termos positivos tal que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5-2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) (u_n) é monótona crescente. **(B)** (u_n) é monótona decrescente.

(C) (u_n) é limitada. **(D)** (u_n) é um infinitamente grande.

6. Num referencial o.n. xOy considere os pontos A, B e C tais que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy;
- o ponto B pertence ao eixo Ox;
- $\overrightarrow{AC}(4\ ,-3)$ e $\overrightarrow{BC}(1\ ,\ 3)$.

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y = -2x + 6$ **(B)** $y = -\frac{1}{2}x + 6$

(C) $y = -2x + 3$ **(D)** $y = -\frac{1}{2}x + 3$

7. Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- a reta de equação $y = -x + 3$ é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1;
- f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **(B)** O gráfico de f não tem pontos de inflexão.

(C) $\forall x \in \mathbb{R}\ , f'(x) < 0$ **(D)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

8. Seja z um número complexo tal que $|z+1| = 1$ e seja $z_1 = -\mathrm{i}$.

Qual é a maior distância entre as imagens geométricas de z e de z_1 no plano complexo?

(A) $1+\sqrt{2}$ **(B)** $2\sqrt{2}$

(C) 2 **(D)** $\sqrt{2}$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere os números complexos $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}^{15}$ e $z_2 = \operatorname{cis}\theta$.

Sabe-se que:

- a imagem geométrica, no plano complexo, do número complexo $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$ pertence à bissetriz do segundo quadrante;
- $\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exprima z_2 na forma algébrica.

2. Uma caixa A tem oito bolas pretas.

Uma caixa B tem oito bolas sendo quatro pretas e quatro brancas.

As caixas são iguais e as bolas apenas se distinguem pela cor.

2.1. Escolhe-se ao acaso uma das caixas da qual se retiram duas bolas, simultaneamente e ao acaso.

Sabendo que as bolas retiradas são iguais, qual é a probabilidade de que tenham sido retiradas da caixa B?

2.2. Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as oito bolas da caixa B.

À medida que as bolas são retiradas, regista-se a respetiva cor, usando a letra B se a bola retirada for branca e a letra P se a bola for preta.

Deste modo obtém-se um registo, como, por exemplo, PBBBPPBP.

Qual é a probabilidade de que o registo assim obtido seja uma capicua?

Nota: Uma **capicua** é uma sequência de letras (ou de algarismos) cuja leitura é a mesma quando feita nos dois sentidos.

3. Seja f a função definida em $[0\ ,\ \pi]$ por $f(x) = \sin^2 x \sin(2x)$.

3.1. Mostre que $f'(x) = 2\sin^2 x\left(4\cos^2 x - 1\right)$.

3.2. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

3.3. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

3.4. Na figura 1 estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo $[ACB]$.

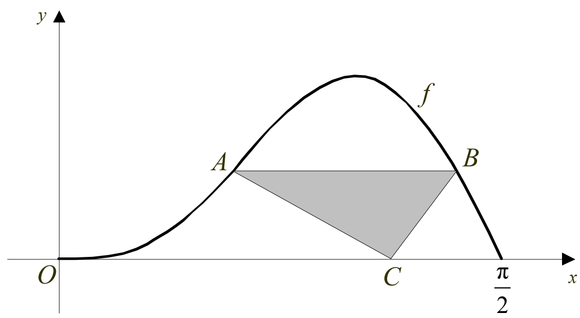

Figura 1

Sabe-se que:

- a reta AB é paralela ao eixo Ox;
- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f e têm abcissas no intervalo $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$;
- o ponto C pertence ao eixo Ox;
- a área do triângulo $[ACB]$ é igual a $\frac{f(a)}{4}$, sendo a a abcissa do ponto A.

Determine o valor de a recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- mostrar que $\overline{AB} = \frac{1}{2}$;
- escrever a equação que lhe permite determinar a abcissa do ponto A;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- indicar o valor de a, arredondado às centésimas.

4. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x<1\\ \dfrac{2\ln x+1}{2x} & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

4.1. Verifique se a função g é contínua no ponto $x=1$.

4.2. Estude o gráfico da função g quanto à existência de assíntotas não verticais.

4.3. Estude a função g quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]1, +\infty[$.

5. Fixado um referencial ortonormado *Oxyz*, considere:

- o plano α de equação $2x+3y+6z+1=0$;
- o ponto V de coordenadas $\left(\frac{5}{3}, 2, 1\right)$;
- a superfície esférica S definida pela equação $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$;
- o cone reto de vértice V e base de centro C contida no plano α.

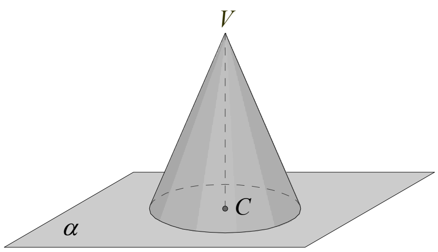

Figura 2

5.1. Determine uma equação vetorial da reta VC.

5.2. Determine a interseção da reta VC com o plano α para concluir que o ponto C tem de coordenadas $(1, 1, -1)$.

5.3. Sabendo que a interseção da superfície esférica com o plano α é a circunferência que limita a base do cone, determine a medida do volume do cone.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1 a 8	(8× 5 pontos)	40 pontos	

GRUPO II

1.		15 pontos	
2.	**2.1.**	15 pontos	
	2.2.	10 pontos	
3.	**3.1.**	5 pontos	
	3.2.	10 pontos	
	3.3.	15 pontos	
	3.4.	15 pontos	
4.	**4.1.**	10 pontos	
	4.2.	15 pontos	
	4.3.	15 pontos	
5.	**5.1.**	10 pontos	
	5.2.	15 pontos	
	5.3.	10 pontos	160 pontos
		Total	**200 pontos**

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$