GRUPO I

1. $\lim u_n = \lim\left[n\ln\left(\frac{1+2n}{2n}\right)\right] = \lim\left[\ln\left(\frac{1+2n}{2n}\right)^n\right]$

$= \lim\left[\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right] = \lim\left[\ln\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n\right]$

$= \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Resposta: (C)

2. $2\times {}^7A_3$

Número de maneiras de, nos 7 lugares da fila, escolher ordenadamente 3 lugares para as raparigas.

Os rapazes podem ficar por ordem crescente ou por ordem decrescente de alturas nos restantes 4 lugares.

Resposta: (B)

3. $f(x) = \sin(2x) - \cos^2(3x)$

$f(0) = \sin(0) - \cos^2(0) = 0 - 1^2 = -1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-(-1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= f'(0)$

$f'(x) = (\sin(2x))' - \left[\cos^2(3x)\right]'$

$= 2\cos(2x) - 2\cos(3x)(\cos(3x))'$

$= 2\cos(2x) + 2\cos(3x)\times 3\sin(3x)$

$= 2\cos(2x) + 6\cos(3x)\times\sin(3x)$

$f'(0) = 2\cos 0 + 6\cos 0\times\sin 0 = 2$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x} = f'(0) = 2$

Resposta: (B)

4. $P(A) = 0{,}3$; $P(A\cap B) = 0{,}2$;

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) =$

$= 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A\cap B)\right]$

$= 1 - (0{,}3 + 0{,}7 - 0{,}2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Resposta: (B)

5. Como $h'(0) = 0$, a tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa nula é horizontal (opções B e C). Seja a o único zero de h''.
Para $x < a$ temos $h''(x) < 0$. Logo, para $x < a$, o gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo.
Resposta: (C)

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-x\to-\infty}\frac{f(-x)}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{-x}$

$(f(-x) = f(x)$ dado que f é par)

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{-x} = -\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -2$

Resposta: (B)

7. $\log_n\left(\log_a \sqrt[n]{a}\right) = \log_n\left(\log_a a^{\frac{1}{n}}\right) = \log_n\left(\frac{1}{n}\right)$

$= \log_n n^{-1} = -1$

Resposta: (A)

8. $\alpha:\; x - y + 2z = 1$

O vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$ é perpendicular a α.

$r:\; x = \frac{y+1}{3} = z$

O vetor $\vec{v} = (1, 3, 1)$ é um vetor diretor da reta r.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1, -1, 2)\cdot(1, 3, 1) = 1 - 3 + 2 = 0$

Logo, como $\vec{u}\perp\vec{v}$, a reta r é paralela a α.

O ponto de coordenadas $(0, -1, 0)$ pertence à reta r.

Verifiquemos se este ponto também pertence ao plano α.

$0 - (-1) + 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (verdadeiro)

A reta r é paralela a α e tem um ponto comum com este plano. Logo, a reta r está contida no plano α.

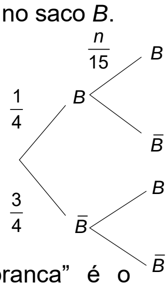
Resposta: (A)

GRUPO II

1.1. Seja n o número de bolas brancas no saco B.

A probabilidade de sair bola branca no saco A é $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

A probabilidade de sair bola branca no saco B é $\frac{n}{15}$.



"Sair, no máximo, uma bola branca" é o acontecimento contrário de "Saírem duas bolas brancas".

P(Sair, no máximo, uma bola branca) =

= 1 – P(saírem duas bolas brancas) =

$= 1 - \frac{1}{4}\times\frac{n}{15} = 1 - \frac{n}{60}$

$$1-\frac{n}{60}=95\% \Leftrightarrow 1-\frac{n}{60}=0{,}95 \Leftrightarrow \frac{n}{60}=1-\frac{95}{100}$$
$$\Leftrightarrow n=60\times\frac{5}{100} \Leftrightarrow n=3$$

No saco *B* estão três bolas brancas.

1.2. $\frac{12}{3!\times 3!\times 3!\times 3!}=369\ 600$ ou

$^{12}C_3\times {}^{9}C_3\times {}^{6}C_3\times {}^{3}C_3=369\ 600$

As bolas podem ficar colocadas nas caixas de 369 600 maneiras diferentes.

2. $P(B\mid A)=P(B\mid \bar{A}) \Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\bar{A})P(B\cap A)=P(A)P(B\cap \bar{A})$

$\Leftrightarrow (1-P(A))P(A\cap B)=P(A)P(\bar{A}\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)-P(A)P(A\cap B)=P(A)P(\bar{A}\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(A\cap B)+P(A)P(\bar{A}\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times\left[P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)\right]$

$\left[(A\cap B)\cap(\bar{A}\cap B)=\varnothing\right]$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P\left[(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)\right]$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P\left[(A\cup \bar{A})\cap B\right]$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(\Omega\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$\Leftrightarrow$ Os acontecimentos *A* e *B* são independentes

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{x+\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{se } x<0\\ \ln\left(e^x+x\right)+2 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

3.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x}{x+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3}{1+\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}}$

$=\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}\underset{y=\frac{x}{2}}{=}\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\sin y}{y}}$

$=\dfrac{3}{1+\frac{1}{2}\times 1}=\dfrac{3}{\frac{3}{2}}=3\times\dfrac{2}{3}=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(e^x+x\right)+2\right]=\ln\left(e^0+0\right)+2=2$

$f(0)=\ln\left(e^0+0\right)+2=2$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, *f* é contínua no ponto *x* = 0.

3.2. Seja $y=mx+b$ a equação reduzida da assíntota do gráfico de *f* quando *x* tende para $+\infty$, caso exista.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^x+x\right)+2}{x}$

$\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left[e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]}{x}+0$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln e^x+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x}$

$=1+\dfrac{\ln(1+0)}{+\infty}=1+\dfrac{0}{+\infty}=1+0=1$

Dado que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$ **(1)**

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+x\right)+2-x\right]$

$\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+x\right)-\ln e^x\right]+2$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x+x}{e^x}\right)+2=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)+2$

$\overset{(1)}{=}\ln(1+0)+2=0+2=2$

A reta de equação $y=x+2$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de *f* quando $x\to+\infty$.

4.1. $u=\sqrt{3}-\mathrm{i}$; $|u|=\sqrt{3^2+1^2}=2$

$\begin{cases}\tan(\operatorname{Arg}u)=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \operatorname{Arg}u\in 4.^{\text{o}}\text{ quadrante}\end{cases}$

$-\dfrac{\pi}{6}$ é um argumento de *u*. $u=2\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^n=\left[2\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^n=2^n\operatorname{cis}\left(-\dfrac{n\pi}{6}\right)$

$2^n\operatorname{cis}\left(-\dfrac{n\pi}{6}\right)\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n\neq 0\wedge -\dfrac{n\pi}{6}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n=-12k,\ k\in\mathbb{Z}$

O menor valor de $n\in\mathbb{N}$, para o qual $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^n$ é um número real positivo, é 12.

4.2. $w^n = \left(w^5\right)^n = z$

$$w^n = \left(w^5\right)^n \Leftrightarrow w^n = w^{5n} \Leftrightarrow w^n - w^{5n} = 0$$
$$\Leftrightarrow w^n\left(1 - w^{4n}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow w^n = 0 \vee 1 - w^{4n} = 0$$
$$\underset{w^n \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - w^{4n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(w^n\right)^4 = 1 \Leftrightarrow w^n = \sqrt[4]{1}$$
$$\Leftrightarrow w^n = \sqrt[4]{\text{cis}\,0}$$
$$\Leftrightarrow w^n = \text{cis}\,\frac{0 + 2k\pi}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$
$$\Leftrightarrow w^n = \text{cis}\,0 \vee w^n = \text{cis}\,\frac{\pi}{2} \vee$$
$$\vee w^n = \text{cis}\,\pi \vee w^n = \text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow w^n = 1 \vee w^n = \text{i} \vee w^n = -1 \vee w^n = -\text{i}$$
$$\underset{w^n = z}{\Leftrightarrow} z = 1 \vee z = \text{i} \vee z = -1 \vee z = -\text{i}$$

5. $f(x) = (x-1)\text{e}^{2x} - 1 - x$; $D_f = [0, +\infty[$

5.1. $f'(x) = \left[(x-1)\text{e}^{2x}\right]' - 0 - 1$

$$= (x-1)'\,\text{e}^{2x} + (x-1)\left(\text{e}^{2x}\right)' - 1$$
$$= \text{e}^{2x} + (x-1)\times 2\,\text{e}^{2x} - 1 = (1 + 2x - 2)\,\text{e}^{2x} - 1$$
$$= (2x-1)\,\text{e}^{2x} - 1$$

$$f''(x) = (2x-1)'\,\text{e}^{2x} + (2x-1)\left(\text{e}^{2x}\right)'$$
$$= 2\times\text{e}^{2x} + (2x-1)\times 2\,\text{e}^{2x}$$
$$= \text{e}^{2x}(2 + 4x - 2) = 4x\,\text{e}^{2x} > 0, \forall x \in]0, +\infty[$$

Como f' é contínua em $[0, +\infty[$ e $f''(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$, a função f' é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

5.2. f' é contínua em $[0, +\infty[$. Logo, f' é contínua em $[0, 1]$.

$$f'(0) = (0-1)\,\text{e}^0 - 1 = -2 < 0$$
$$f'(1) = (2-1)\,\text{e}^2 - 1 = \text{e}^2 - 1 > 0$$

Dado que f' é contínua em $[0,\ 1]$ e $f'(0)\times f'(1) < 0$ podemos concluir, pelo teorema de Bolzano, que f' admite pelo menos um zero no intervalo $]0,\ 1[$.

Como f' é estritamente crescente em $[0, +\infty[$, f' é injetiva. Logo, f' não pode ter dois zeros. Portanto, o zero que se provou existir em $]0, 1[$ é único.

5.3. Atendendo a que f' é estritamente crescente e $f'(\alpha) = 0$ então $f'(x) < 0, \forall x \in [0, \alpha[$ e $f'(x) > 0, \forall x \in]\alpha, +\infty[$ pelo que a variação de f é a seguinte:

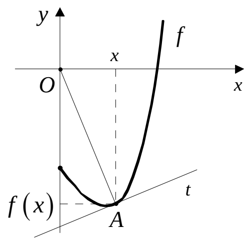
x	0		α	$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$
f	-2	↘	$f(\alpha)$	↗
			Mín.	

Portanto, $f(\alpha)$ é o mínimo da função *f*.

5.4. $A(x, f(x))$

Declive da reta *OA*: $d_{OA} = \dfrac{f(x)}{x}$

Declive da reta *AB*: $d_t = f'(x)$



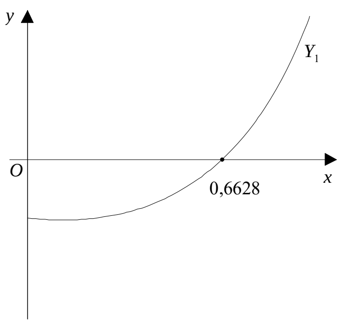
Como o triângulo [*OAB*] é retângulo em *A* as retas *t* e *OA* são perpendiculares pelo que a abcissa do ponto *A* é a solução da equação:

$$d_t = -\frac{1}{d_{OA}} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{x}{f(x)} = 0$$

Recorrendo à calculadora determinou-se, no intervalo $]0,\ 1[$, o zero da função:

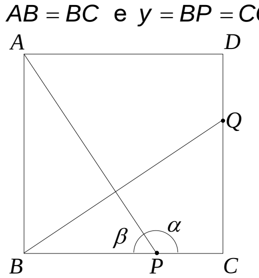
$Y_1 = f'(x) + \dfrac{x}{f(x)}$, ou seja,

$$Y_1 = (2x-1)\,\text{e}^{2x} - 1 + \frac{x}{(x-1)\,\text{e}^{2x} - 1 - x}.$$



A abcissa do ponto *A* é aproximadamente igual a 0,66.

6.1. Seja $x = \overline{AB} = \overline{BC}$ e $y = \overline{BP} = \overline{CQ}$.



$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ}\right) =$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} =$

$= 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} + 0 =$

($\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{CQ}$)

$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CQ}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \hat{\ } \overrightarrow{CQ}\right) +$

$+ \left\|\overrightarrow{BP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BP} \hat{\ } \overrightarrow{BC}\right)$

$= xy \times \cos \pi + yx \times \cos 0 = -xy + xy = 0$

Logo, como $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BQ}$ são perpendiculares

6.2. $\alpha = C\hat{P}A$; $\overline{PC} = \frac{1}{3}\overline{BP}$

Seja $\beta = A\hat{P}B$; $\alpha = \pi - \beta$.

$$\tan \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BP} + \overline{PC}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BP} + \frac{1}{3}\overline{BP}}{\overline{BP}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\overline{BP}}{\overline{BP}} = \frac{4}{3}$$

$$1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{9}{25}$$

Como β é um ângulo agudo:

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta = -\frac{3}{5}$$

6.3. $H = D + \overrightarrow{DH} = D + \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BF} = F - B = (0, 1, 0) - (4, 1, 3) = (-4, 0, -3)$

$H = D + \overrightarrow{BF} = (1, 6, 7) + (-4, 0, -3) = (-3, 6, 4)$

$\overrightarrow{HB} = B - H = (4, 1, 3) - (-3, 6, 4) = (7, -5, -1)$

$HB: \ (x, y, z) = (4, 1, 3) + k(7, -5, -1), k \in \mathbb{R}$

Seja R um ponto genérico da reta HB. Então $R(4 + 7k, 1 - 5k, 3 - k), k \in \mathbb{R}$.

Pretendemos determinar $k \in \mathbb{R}$ de modo que o ponto R pertença ao plano xOy, isto é, ao plano de equação $z = 0$.

Nas coordenadas de R temos $z = 3 - k$. Logo, vem $3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Substituindo k por 3 nas coordenadas de R, obtemos:

$$(4 + 7 \times 3, 1 - 5 \times 3, 3 - 3) = (25, -14, 0)$$

O ponto de interseção da reta BH com o plano xOy tem coordenadas $(25, -14, 0)$.

FIM