Proposta de Exame de Matemática A – 12.º ano

Nome da Escola	Ano letivo 20 - 20		Matemática A | 12.º ano
Nome do Aluno	Turma	N.º	Data
Professor			- - 20

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere a sucessão $u_n = n\ln\left(\frac{1+2n}{2n}\right)$.

Qual é o valor de $\lim u_n$?

(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\sqrt{e}$

2. Quatro rapazes e três raparigas, todos com alturas diferentes, vão colocar-se numa fila para tirarem uma fotografia.

De quantas maneiras se podem colocar na fila de modo que os rapazes fiquem ordenados pela altura?

(A) ${}^7A_3 \times 3!$ **(B)** $2 \times {}^7A_3$ **(C)** $2 \times {}^7C_3$ **(D)** ${}^7C_4 \times 3!$

3. Considere a função *f* definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \sin(2x) - \cos^2(3x)$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)+1}{x}$?

(A) -2 **(B)** 2 **(C)** -1 **(D)** 1

4. Seja S o espaço de resultados (finito) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$
- $P(A \cap B) = 0{,}2$
- $P(\overline{B}) = 0{,}3$

Qual o valor de $P(\overline{A} \cap \overline{B})$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}8$ **(D)** $0{,}9$

5. Na figura 1, está representada, num referencial *xOy*, parte do gráfico de uma função h'', segunda derivada de uma função polinomial *h.*

Sabe-se que a primeira derivada da função *h* é nula no ponto 0, ou seja, $h'(0)=0$.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função *h* ?

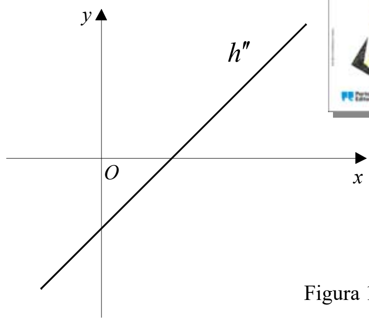
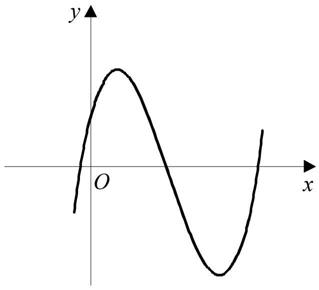
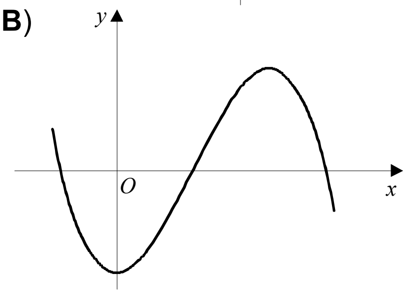


Figura 1

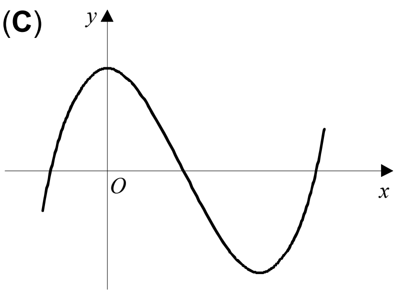
(**A**)



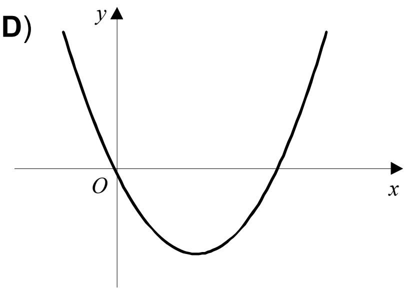
(**B**)



(**C**)



(**D**)



6. De uma função *f*, par, e de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a reta de equação $y=2x-3$ é uma assíntota do seu gráfico quando *x* tende para $+\infty$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$?

(**A**) 2 (**B**) –2 (**C**) 3 (**D**) –3

7. Sendo *n* um número natural diferente de 1 e *a* um número real positivo, também diferente de 1, $\log_n\left(\log_a \sqrt[n]{a}\right)$ é igual a:

(**A**) –1 (**B**) 1 (**C**) n (**D**) $\dfrac{1}{n}$

8. Considere, num referencial o. n. *Oxyz*, o plano α de equação $x-y+2z=1$ e a reta *r* definida por $x=\dfrac{y+1}{3}=z$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(**A**) A reta *r* está contida no plano α.

(**B**) A reta *r* é estritamente paralela ao plano α.

(**C**) A reta *r* é concorrente e perpendicular ao plano α.

(**D**) A reta *r* é concorrente e não perpendicular ao plano α.

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Um saco *A* tem 4 bolas brancas e 12 bolas pretas numeradas de 1 a 12.

Um saco *B* tem 15 bolas das quais algumas são brancas.

1.1. Ao tirar ao acaso uma bola de cada saco, a probabilidade de sair, no máximo, uma bola branca é igual a 95%. Quantas bolas brancas estão no saco *B*?

1.2. As doze bolas pretas do saco *A* vão ser distribuídas, em partes iguais, por 4 caixas diferentes. De quantas maneiras diferentes podem as bolas ficar colocadas nas caixas?

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiencia aleatória.

Sejam *A* e *B* dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se ainda que o acontecimento *A* é possível mas não certo.

Prove que *A* e *B* são independentes se e somente se $P\left(B \mid A\right) = P\left(B \mid \overline{A}\right)$.

3. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x + \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} & \text{se } x < 0 \\ \ln\left(e^x + x\right) + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

3.1. Averigue se a função *f* é contínua em $x = 0$.

3.2. Averigue se o gráfico da função *f* tem uma assíntota oblíqua quando *x* tende para $+\infty$.

4. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

4.1. Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $\left(\sqrt{3} - i\right)^n$ é um número real positivo.

4.2. Sabe-se que w e w^5 são raízes de índice *n* de um número complexo *z*, não nulo. Determine *z*.

5. Seja f a função definida em $[0, +\infty[$ por $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$.

5.1. Designando por f' a função derivada de f, mostre que $f'(x) = (2x-1)e^{2x} - 1$ e mostre que a função f' é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

5.2. Justifique, aplicando o teorema de Bolzano, que a função f' admite pelo menos um zero no intervalo $]0, 1[$ e, de seguida, conclua que esse é o único zero da função f'.

5.3. Sendo α o zero da função f' cuja existência provou nas alíneas anteriores, mostre que $f(\alpha)$ é o mínimo da função f.

5.4. Na figura 2 estão representados, num referencial *xOy*, parte do gráfico da função f e o triângulo [*OAB*].

Sabe-se que:

- o ponto *B* pertence ao eixo *Ox*;
- o ponto *A* pertence ao gráfico de f e tem abcissa $x \in]0, 1[$;
- a reta *AB* é tangente ao gráfico de f no ponto *A*;
- o triângulo [*OAB*] é retângulo em *A*.

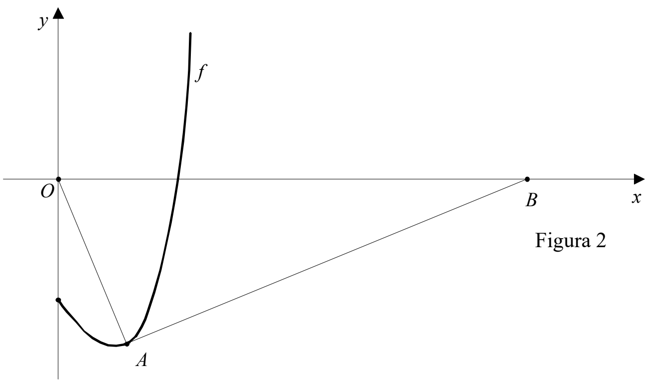


Figura 2

Determine a abcissa do ponto *A* recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abcissa de *A* com arredondamento às centésimas.

6. Considere o cubo [*ABCDEFGH*] representado na figura 3 (o vértice *F* não é visível).

Os pontos *P* e *Q* pertencem às arestas [*BC*] e [*CD*], respetivamente.

Sabe-se ainda que $\overline{PC} = \overline{QD}$.

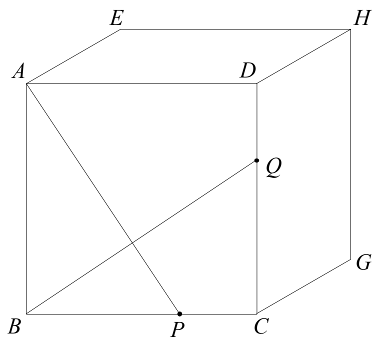


Figura 3

6.1. Prove que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BQ}$ são perpendiculares.

6.2. Seja α amplitude do ângulo *CPA*.

Sabendo que $\overline{PC} = \frac{1}{3}\overline{BP}$, determine o valor exato de $\cos\alpha$.

6.3. Fixado um referencial ortonormado do espaço, são conhecidas as coordenadas de três vértices do cubo: $B(4, 1, 3)$, $D(1, 6, 7)$ e $F(0, 1, 0)$.

Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta *BH* com o plano *xOy*.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8.	(8 × 5 pontos)	40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	10 pontos
	1.2.	10 pontos
2.		10 pontos
3.		
	3.1.	10 pontos
	3.2.	10 pontos
4.		
	4.1.	10 pontos
	4.2.	10 pontos
5.		
	5.1.	10 pontos
	5.2.	13 pontos
	5.3.	14 pontos
	5.4.	15 pontos
6.		
	6.1.	15 pontos
	6.2	8 pontos
	6.3.	15 pontos
		160 pontos

Total	200 pontos

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência: αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathrm{IN}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$(u^n)' = n\, u_{n-1} u'$ ($n \in \mathrm{IR}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathrm{IR}^+ \setminus \{1\}$)

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathrm{IR}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathrm{IN})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathrm{IR})$$