**Proposta de Teste [maio – 2017]**

**Nome:** ______________________________________________

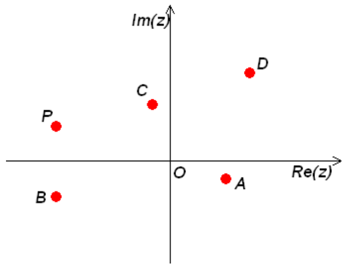
**Ano / Turma:** _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- Para cada resposta, identifica o grupo e o item.
- Apresenta as tuas respostas de forma legível.
- Apresenta apenas uma resposta para cada item.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

## GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, seleciona a opção correta. Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

**1.** Na figura, no plano complexo, estão representados cinco pontos: $A$ , $B$ , $C$ , $D$ e $P$ .




O afixo de um número complexo $z$ é representado por $P$ . Qual dos outros pontos pode representar o afixo do número complexo representado por $\frac{-\mathrm{i}\bar{z}}{2}$ ?

**(A)** $D$ **(B)** $A$ **(C)** $C$ **(D)** $B$

**2.** Para um certo número real $k$ , não nulo, a função $f$ é contínua em $\mathbb{R}$ , sendo definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin\left(\dfrac{8x}{k}\right)}{kx} & \text{se } x\neq 0 \\ \dfrac{\cos(kx)}{k} & \text{se } x=0 \end{cases}$$

Esse valor de $k$ é:

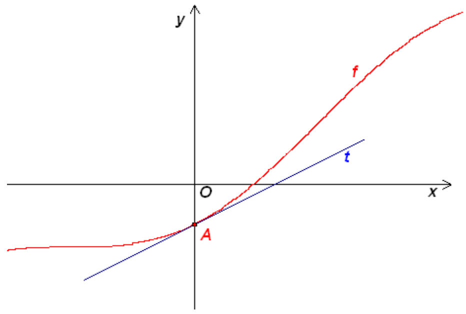
**(A)** 2 **(B)** 8 **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

**3.** Sejam $a$ e $b$ números reais maiores que $1$ . Sabe-se que $a=\sqrt[3]{b}$ .

Qual dos seguintes valores é igual a $\log_b \sqrt{a}$ ?

**(A)** $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{5}{6}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{6}$

**4.** Na figura está representada parte do gráfico de uma função $f$ de domínio $\mathbb{R}$.




Sabe-se que a reta $t$ definida pela equação $y=\frac{x}{2}-1$ é tangente ao gráfico da função $f$ no ponto $A(0\,,\,-1)$.

Pode concluir-se que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}$ é igual a:

**(A)** $-1$ **(B)** $-\infty$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $0$

**5.** Considera em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $|iz-1+2i|=r$, sendo $r$ um número real positivo.

Para cada valor de $r$ esta condição define uma circunferência no plano complexo.

O centro dessa circunferência é o afixo do número complexo:

**(A)** $1+2i$ **(B)** $-2-i$ **(C)** $2+i$ **(D)** $1-2i$

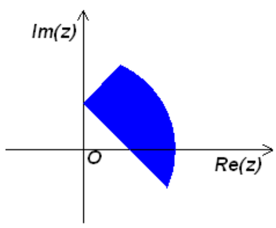
**6.** Considera, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição:

$$|\arg(z-i)|\leq\frac{\pi}{4}\ \wedge\ |z|\leq 2$$

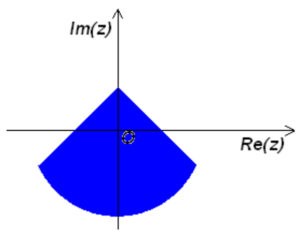
Considera como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi\,,\pi[$.

Qual das seguintes representações no plano complexo pode corresponder à condição dada?

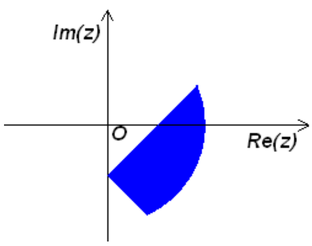
**(A)**



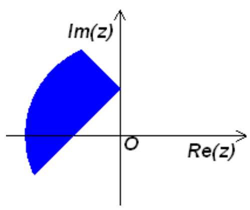

**(B)**




**(C)**




**(D)**



## GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

**1.** Um casal, a Rita e o Pedro, fazem parte de um grupo de trabalho constituído por dez elementos: seis homens e quatro mulheres.

Do grupo de dez elementos escolhe-se, ao acaso, uma equipa de três elementos.

Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ os acontecimentos:

***A***: "Do casal, Rita e Pedro, um e um só faz parte da equipa escolhida"

***B***: "O Pedro faz parte da equipa escolhida"

***C***: "A equipa escolhida é constituída só por homens"

***D***: "Do casal, Rita e Pedro, nenhum faz parte da equipa escolhida"

**1.1.** Mostra que os acontecimentos $A$ e $D$ são equiprováveis.

**1.2.** Determina a probabilidade condicionada $P\left(C|B\right)$.

**2.** Considera a função $f$ definida por $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{2x}$.

Seja $P_n$, $n\in\mathbb{N}$, uma sequência de pontos do gráfico de $f$ em que as abcissas estão em progressão geométrica, cujo termo geral é $x_n=e^{\frac{n}{2}}$.

**2.1.** Determina o domínio de $f$ e estuda a função quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

**2.2.** Mostra que a abcissa de $P_1$ é zero da função $f$.

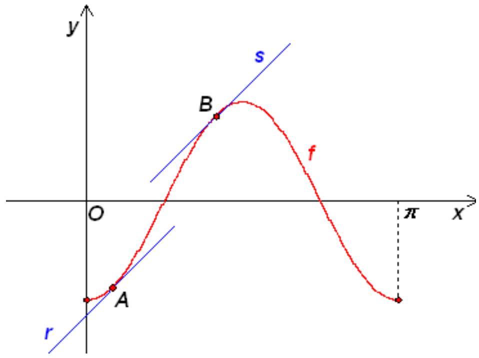
**2.3.** Sabe-se que $f'\left(x\right)=\dfrac{3-2\ln x}{2x^2}$.

**a)** Determina uma equação, na forma reduzida, da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $P_2$.

**b)** Estuda a função $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e mostra que $P_4$ é ponto de inflexão.

**3.** Seja $f$ a função de domínio $[0,\pi]$ definida por:

$$f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$$




Na figura estão representadas duas retas $r$ e $s$ e o gráfico da função $f$.

Sabe-se que:

- as retas $r$ e $s$ são paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares;
- as retas $r$ e $s$ são tangentes ao gráfico de $f$ nos pontos $A$ e $B$, respetivamente.

**3.1.** Seja $f'$ a função derivada de $f$. Mostra que $f'(x)=2\sin(2x)$.

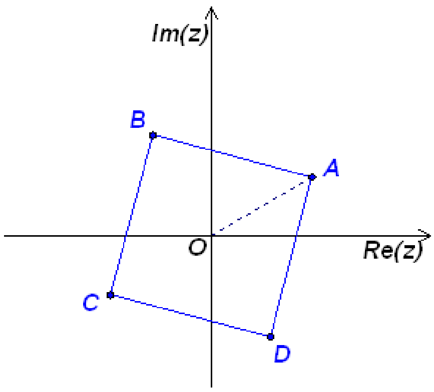
**Nota**: $2\sin x\cos x=\sin(2x)$

**3.2.** Recorre ao resultado obtido em **3.1.** e determina:

**a)** as abcissas dos pontos $A$ e $B$;

**b)** as coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico de $f$.

**4.** Na figura está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$ com centro em $O$.




Sabe-se que $A$, $B$, $C$ e $D$ são imagens geométricas dos números complexos $z_A$, $z_B$, $z_C$ e $z_D$, sendo $z_B=-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

**4.1.** Representa $z_A$ na forma algébrica e $z_D$ na forma trigonométrica.

**4.2.** Seja $z=\operatorname{cis}\theta$, com $\theta\in[0,2\pi[$. Determina todos os valores de $\theta\in[0,2\pi[$ de modo que $w$ seja um imaginário puro, sendo $w=z\times z_C$.

**5.** Considera em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números complexos:

$$z_A = 2 - i^{36}\,, \quad z_B = 2\left(\text{cis}\frac{\pi}{2}\right)^{37}$$

**5.1.** Resolve a equação $z^3 = z_A - \text{i}$. Apresenta as soluções na forma trigonométrica com argumentos mínimos positivos.

**5.2.** Para cada número real $\theta \in \left]0\,,\pi\right[$ há um número complexo $z_C = \cos\theta + \text{i}2\sin\theta$. No plano complexo, sejam $A$, $B$ e $C$ os afixos dos números complexos $z_A$, $z_B$ e $z_C$, respetivamente. Para determinados valores de $\theta$, o triângulo $[ABC]$ é isósceles com $C$ pertencente à mediatriz de $[AB]$.

**Recorre** às capacidades gráficas da **calculadora** e determina esses valores de $\theta$, apresentando os resultados arredondados às centésimas.

Na tua resposta deves apresentar:

- uma equação da mediatriz de $[AB]$;
- a reprodução do gráfico da função ou gráficos das funções que tiveres necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- as abcissas arredondadas às centésimas dos pontos que fazem parte da resposta à questão colocada.

## FIM

| Cotações | | | | | | | | | | | | | | Totais |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Grupo I** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.** | | | | | | | | |
| | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | | | | | | | | **48** |
| **Grupo II** | **1.1.** | **1.2.** | **2.1.** | **2.2.** | **2.3.a)** | **2.3.b)** | **3.1.** | **3.2.a)** | **3.2.b)** | **4.1.** | **4.2.** | **5.1.** | **5.2.** | |
| | 10 | 10 | 15 | 10 | 10 | 10 | 10 | 12 | 15 | 10 | 10 | 15 | 15 | **152** |
| | | | | | | | | | | | | | | **200** |

# FORMULÁRIO

## GEOMETRIA

**Comprimento de um arco de circunferência**
$\alpha r$
( $\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)*

**Áreas de figuras planas**

**Polígono regular:** $Semiperímetro \times Apótema$

**Setor circular:** $\frac{\alpha r^2}{2}$ ( $\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

**Áreas de superfícies**

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(*r – raio*)

**Volumes**

**Pirâmide:** $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

**Cone:** $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

**Esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ (*r – raio*)

## PROGRESSÕES

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão ($u_n$):

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

## COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

## PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se $X$ é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

## REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$