Cotações														Totais
Grupo I	1.	2.	3.	4.	5.	6.								
	8	8	8	8	8	8								48
Grupo II	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	2.3.a)	2.3.b)	3.1.	3.2.a)	3.2.b)	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	
	10	10	15	10	10	10	10	12	15	10	10	15	15	152
														200

GRUPO I

1. A imagem do afixo do número complexo $\frac{-\mathrm{i}\bar{z}}{2}$ pode ser obtida a partir de P, aplicando sucessivamente as seguintes transformações geométricas:

- reflexão em relação ao eixo real;
- reflexão em relação ao ponto O;
- rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{2}$;
- homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$.

Opção (C)

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{8x}{k}\right)}{kx}=\frac{8}{k^2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{8x}{k}\right)}{\frac{8x}{k}}=\frac{8}{k^2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{8}{k^2}$$

$f(0)=\frac{1}{k}$. Então, a função é contínua se e só se $\frac{8}{k^2}=\frac{1}{k}$, ou seja, $k=8$.

Opção (B)

3.

$a=\sqrt[3]{b}$. Então, $\log_b a=\log_b \sqrt[3]{b}$, ou seja $\log_b a=\frac{1}{3}$.

Como $\log_b \sqrt{a}=\frac{1}{2}\log_b a$, conclui-se que $\log_b \sqrt{a}=\frac{1}{6}$

Opção (D)

4. O declive da reta tangente no ponto $(0,-1)$ é $\frac{1}{2}$, concluindo-se que $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Mas, $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}=\frac{1}{2}$.

Opção (C)

5.

$|iz-1+2i|=r \Leftrightarrow \left|i\left(z-\frac{1}{i}+2\right)\right|=r \Leftrightarrow |i(z+i+2)|=r \Leftrightarrow |z-(-2-i)|=r$

O centro da circunferência é o afixo do número complexo $-2-i$.

Opção (B)

6.

$|\arg(z-i)|\leq\frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad |z|\leq 2 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}\leq\arg(z-i)\leq\frac{\pi}{4} \wedge |z|\leq 2$.

Opção (A)

GRUPO II

1.

1.1.

10 elementos (6H+4M)

Número de casos possíveis: ${}^{10}C_3=120$

Número de casos favoráveis ao acontecimento A: $2\times{}^{8}C_2=2\times 28=56$

Número de casos favoráveis ao acontecimento D: ${}^{8}C_3=56$

$P(A)=P(D)=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$

1.2.

$$P(C|B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{{}^{5}C_2}{{}^{10}C_3}}{\frac{{}^{9}C_2}{{}^{10}C_3}}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

2.

2.1.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$x = 0$ é assíntota vertical.

Seja $y = mx + b$ assíntota não vertical.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} \right) - \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2x^2} \right) = 0 - 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x} \right) = 0 .$$

A reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

As assíntotas são $x = 0$ e $y = 0$.

2.2.

Seja $P_1(x_1, y_1)$.

$x_1 = e^{\frac{1}{2}}$. Então, $f(x_1) = \dfrac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$

2.3. a)

Seja $P_2(x_2, y_2)$.

Então, $x_2 = e$ e $y_2 = f(e) = \dfrac{\ln e}{e} - \dfrac{1}{2e} = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2e} = \dfrac{1}{2e}$

$P_2\left(e, \dfrac{1}{2e}\right)$ e $f'(e) = \dfrac{3 - 2\ln e}{2e^2} = \dfrac{1}{2e^2}$

$$y - \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e^2}(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2e^2}x - \frac{e}{2e^2} + \frac{1}{2e} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2e^2}x$$

2.3. b)

$$f''(x)=\left(\frac{3-2\ln x}{2x^2}\right)'=\frac{-\frac{2}{x}\times\left(2x^2\right)-\left(3-2\ln x\right)4x}{2x^2}=$$

$$=\frac{-4x-12x+8x\ln x}{2x^2}=\frac{-8+4\ln x}{x}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4\ln x=8 \Leftrightarrow x=e^2$

$x_4=e^2$

$$y_4=f\left(e^2\right)=\frac{\ln\left(e^2\right)}{e^2}-\frac{1}{2e^2}=\frac{2}{e^2}-\frac{1}{2e^2}=\frac{3}{2e^2}$$

x	0		e^2	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
f		$\cap$	$\frac{3}{2e^2}$	$\cup$

f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0\,,e^2\right]$ e voltada para cima em $\left[e^2,+\infty\right[$.

$P_4\left(e^2,\frac{3}{2e^2}\right)$ é um ponto de inflexão.

3.

3.1.

$f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)=\sin^2 x-\cos^2 x$

$f'(x)=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)'=2\sin x\cos x-2\cos x\left(-\sin x\right)=4\sin x\cos x=2\sin(2x)$

$f'(x)=2\sin(2x)$

3.2. a)

Bissetriz dos quadrantes ímpares: $y=x$, declive 1.

$f'(x)=1\Leftrightarrow 2\sin(2x)=1\Leftrightarrow \sin(2x)=\frac{1}{2}$.

$$\sin(2x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x)=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi \ \vee\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Como $x\in[0,\pi]$, conclui-se que $x=\frac{\pi}{12} \vee x=\frac{5\pi}{12}$.

Assim, a abcissa de A é $\frac{\pi}{12}$ e a abcissa de B é $\frac{5\pi}{12}$.

3.2. b)

$f''(x)=(2\sin(2x))'=4\cos(2x)$ e $x\in[0,\pi]$

$f''(x)=0 \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow \cos(2x)=0 \wedge x\in[0,\pi] \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0,\pi]$.

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \vee x=\frac{3\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f''(x)$	+	+	0	–	0	+	+
f		$\cup$	0	$\cap$	0	$\cup$	

Pontos de inflexão do gráfico de f: $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$

4.

4.1.

$z_B=-1+\sqrt{3}\,i$

$z_A=-i\times z_B=\sqrt{3}+i$

$z_D=-z_B=1-\sqrt{3}\,i$

$|z_D|=\sqrt{1+3}=2$

Seja α o argumento positivo mínimo de z_D.

$\tan\alpha=-\sqrt{3} \wedge \alpha\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$. Daqui resulta, $\alpha=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$.

Assim, tem-se: $z_D=2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

4.2.

$w=\operatorname{cis}\theta\times z_C$ e $z_C=-i\times z_D=\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\times 2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

Então, $w=\operatorname{cis}\theta\times 2\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\operatorname{cis}\left(\theta+\frac{7\pi}{6}\right)$.

w é imaginário puro. Então, $\theta+\frac{7\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, ou seja, $\theta=-\frac{2\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z} \wedge \theta\in[0,2\pi[$.

Daqui resulta que $\theta=\frac{\pi}{3}$ ou $\theta=\frac{4\pi}{3}$.

5.

5.1.

$z_A = 2 - \mathrm{i}^{36} = 2 - \mathrm{i}^0 = 1$

Assim, $z_A - \mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$.

$z^3 = z_A - \mathrm{i} \Leftrightarrow z^3 = 1 - \mathrm{i} \Leftrightarrow z^3 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$z = \sqrt[3]{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}$; $k \in \{0, 1, 2\}$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{-\pi + 8k\pi}{12}$; $k \in \{0, 1, 2\}$

Se $k = 0$, então $z = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{23\pi}{12}\right)$.

Se $k = 1$, então $z = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Se $k = 2$, então $z = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{15\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Conjunto-solução: $\left\{\sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right), \sqrt[6]{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right\}$

5.2. Ao número complexo z_A corresponde o ponto $A(1, 0)$ e ao número complexo z_B corresponde o ponto $B(0, 2)$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 2)$

Declive da reta AB: -2

Declive da mediatriz de $[AB]$: $\frac{1}{2}$

Ponto médio de $[AB]$: $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Equação damediatriz de $[AB]$: $y = \frac{1}{2}x + b$ e $1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + b$, ou seja, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

Ao número complexo z_C corresponde o ponto $C(\cos\theta, 2\sin\theta)$.

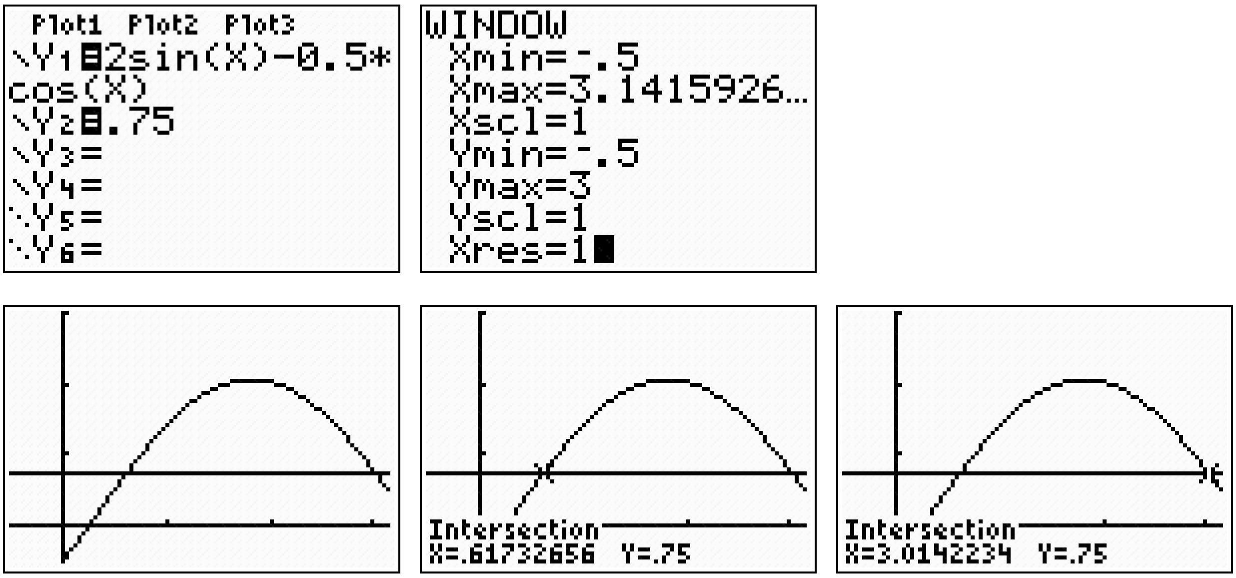
O ponto C pertence à mediatriz de $[AB]$. Então tem-se:

$2\sin\theta = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{3}{4}$, ou seja, $2\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{3}{4}$ e $\theta \in \left]0, \pi\right[$.

Recorrendo à calculadora gráfica determina-se as abcissas dos pontos de interseção de

$y = 2\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$ com $y = \frac{3}{4}$ no intervalo $\left]0, \pi\right[$.

A seguir está representada uma sequência de imagens para obter o resultado pedido.



As abcissas arredondadas às centésimas dos pontos correspondentes a z_C são: 0,62 e 3,01 .

FIM