TESTE GLOBAL – 12.º ANO

NOME: ____ **N.º:** ___ **TURMA:** ___ **ANO LETIVO:** _____/_____

AVALIAÇÃO: __________________ **PROFESSOR:** ________________ **ENC. EDUCAÇÃO:** ___________________

DURAÇÃO DO TESTE: 90 MINUTOS

O teste é constituído por dois grupos. O Grupo I é constituído por itens de escolha múltipla e o Grupo II é constituído por itens de construção.

GRUPO I

Este grupo é constituído por itens de escolha múltipla.
Para cada item, seleciona a opção correta.

1. Na caixa de berlindes do Miguel existem sete berlindes azuis e dois berlindes vermelhos. Qual é a probabilidade de, ao escolher dois berlindes ao acaso, um ser azul e o outro vermelho?

(A) $\frac{14}{81}$ **(B)** $\frac{7}{36}$ **(C)** $\frac{14}{81}$ **(D)** $\frac{7}{18}$

2. Quantos números de três algarismos se podem formar com algarismos de 1 a 9, sendo esses números pares e formados por algarismos todos diferentes?

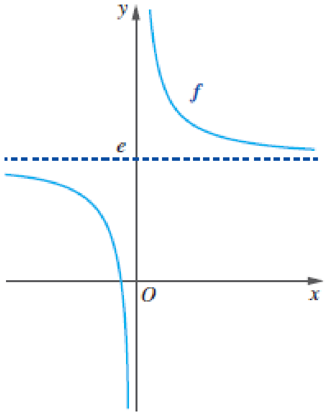
(A) $3\times 9!$ **(B)** ${}^{9}A_{3}$ **(C)** $4\times {}^{8}A_{2}$ **(D)** $4\times {}^{9}A_{2}$

3. Oito amigos, entre os quais o casal Sofia e Carlos, decidiram ir a um concerto. Quanto chegaram já só havia 4 bilhetes. Decidiram, então, sortear os 4 bilhetes pelos 8 amigos.

Qual é a probabilidade de pelo menos um dos elementos do casal ir ao concerto?

(A) $\frac{{}^{6}C_{3}+{}^{6}C_{2}}{{}^{8}C_{4}}$ **(B)** $\frac{{}^{6}C_{3}+{}^{6}C_{2}\times 2}{{}^{8}C_{4}}$ **(C)** $\frac{{}^{8}C_{4}-{}^{6}C_{2}}{{}^{8}C_{4}}$ **(D)** $\frac{{}^{6}C_{3}+{}^{6}C_{4}}{{}^{8}C_{4}}$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. As retas de equação $x=0$ e $y=e$ (e é número de Neper) são as únicas assíntotas do gráfico da função f.



4.1 Seja (v_n) uma sucessão de números reais tal que $\lim f(v_n)=+\infty$. Qual das seguintes expressões pode ser um termo geral da sucessão (v_n)?

(A) $e+\frac{1}{n^3}$ **(B)** $-\frac{2}{n}$ **(C)** $e-\frac{1}{n^2}$ **(D)** $\left(\frac{e}{3}\right)^n$

4.2 O valor do $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log(10^{-x}+10)}{f(x)}$ é:

(A) 1 **(B)** e^{-1} **(C)** $+\infty$ **(D)** e

5. Considera uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $[1,6]$, tal que $f(1)=-1$ e $f(6)=-4$. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de pelo menos uma solução da equação $g(x)=0$, no intervalo $]1,6[$. Qual das expressões seguintes pode definir a função g?

(A) $g(x)=4-(f(x)+x)$

(C) $g(x)=4-|f(x)-x|$

(B) $g(x)=4-|f(x)+x|$

(D) $g(x)=4-(f(x)-x)$

6. Seja f uma função definida por $f(x)=e^{3x-1}$.
Qual dos seguintes pontos **não** pertence ao gráfico de f?

(A) $A\left(\frac{1}{3},1\right)$ **(B)** $B\left(0,e^{-1}\right)$ **(C)** $C\left(\ln 3,27e^{-1}\right)$ **(D)** $D\left(\ln 4,16e^{-1}\right)$

7. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f(x)-3\ln(x)}{2x}=\frac{1}{2}$ e que o gráfico da função f tem uma única assíntota oblíqua.
Qual das equações seguintes pode definir essa assíntota?

(A) $y=2x+1$ **(B)** $y=\frac{1}{2}x+1$ **(C)** $y=x+2$ **(D)** $y=x+\frac{1}{2}$

8. O valor de $\lim_{x\to 7}\frac{\sin(x^2-6x-7)}{x-7}$ é:

(A) 0 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8

GRUPO II

Este grupo é constituído por itens de construção. Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que efetuares e todas as justificações necessárias.

9. O código de um cofre é constituído por uma sequência de cinco algarismos (de 0 a 9) seguida de uma sequência de quatro letras (considera 23 letras possíveis). Um exemplo de um código deste cofre é:

1 2 3 4 5 A B C D

Escolhendo ao acaso um destes códigos, qual é a probabilidade de ter três 4 e as letras serem todas diferentes? Apresenta a probabilidade na forma de dízima, arredondada com quatro casas decimais.

10. Seja f a função de variável real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x=1\\ x-1 & \text{se } x\neq 1\end{cases}$$

10.1 A função f é contínua em $[1,3]$? Justifica a resposta.

10.2 Estuda a função f quanto à existência de extremos em $[1,3]$.

11. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por:

$$h(x)=\begin{cases} e^{x^{-1}}\times x^3 & \text{se } x>0 \\ \ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)^{x^2} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

11.1 Utilizando as propriedades dos logaritmos mostra que

$$\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x^2}=x^2\ln(x^2+4)-x^2\ln(x^2)$$

11.2 Determina, caso exista, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

11.3 Estuda a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

11.4 Mostra que

$$h'(x)=\begin{cases} e^{x^{-1}}\times(3x^2-x^3) & \text{se } x>0 \\ 2x\times\left(\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)-\dfrac{4}{x^2+4}\right) & \text{se } x<0 \end{cases}$$

e determina $h'(-2)$.

12. Considera a função g de domínio $]0,\pi[$ definida por $g(x)=x-\cos(x)+1$.
Estuda a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão ao seu gráfico.

13. Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos x$$

13.1 Determina $f'(x)$, a expressão analítica da derivada de f.

13.2 Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa $x = 0$.

13.3 Recorrendo ao Teorema de Bolzano- Cauchy, mostra, analiticamente, que f' tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

FIM

Cotações

	GRUPO I									GRUPO II											Total
Questões	**1**	**2**	**3**	**4.1**	**4.2**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10.1**	**10.2**	**11.1**	**11.2**	**11.3**	**11.4**	**12**	**13.1**	**13.2**	**13.3**	
Cotações	5	5	5	5	5	5	5	5	5	15	10	10	10	15	10	20	25	10	15	15	**200**

RESOLUÇÕES

GRUPO I

1. (D)	**4.1** (D)	**6.** (D)
2. (C)	**4.2** (B)	**7.** (B)
3. (C)	**5.** (C)	**8.** (D)

GRUPO II

9.

$$\frac{{}^{5}C_{3} \times 9^{2} \times {}^{23}A_{4}}{10^{5} \times 23^{4}} \approx 0{,}0062$$

10.1

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0 \neq$

$\neq 1 = f(1)$

Logo, não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, pelo que a função não é contínua em $x = 1$, portanto não é contínua em $[1, 3]$.

10.2

A função f tem um máximo igual a 2, no intervalo $[1, 3]$, mas não tem mínimo.

10.3

Não contradiz o Teorema de Weiertrass, pois este requer a continuidade da função num intervalo fechado em $\mathbb{R}$ e, neste caso, a função não é contínua.

11.2

$\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$

logo não existe $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

11.3

A.V.: $x=0$; como a função é contínua, não existem mais assíntotas verticais, para além desta.
Para $x\to-\infty$,
A.H.: $y=4$
Para $x\to+\infty$,
o gráfico da função não tem assíntotas pois $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=-\infty$.

11.4

$h'(-2)=2-4\ln(2)$

12.

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$; tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Tem um ponto de inflexão em $x=\frac{\pi}{2}$.

13.1 $f'(x)=-\frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x}\cos x-e^{-\frac{1}{2}x}\sin x$

13.2

$y=-\frac{1}{2}x+1$

13.3

Como f' é contínua em $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{4}}<0$ e $f'(\pi)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}>0$, conclui-se que f' tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

FIM