Cotações											Totais
Grupo I	1.	2.	3.	4.	5.						
	8	8	8	8	8						40
Grupo II	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2.	
	10	20	15	15	20	15	15	15	15	20	160
											200

GRUPO I

1. A equação do plano mediador de [*ED*] é $x = 2$.

Qualquer ponto do conjunto *M* tem coordenadas inteiras e abcissa 2 .

A ordenada e a cota são diferentes e pertencem ao conjunto {0 , 1 , 3 , 4} .

A resposta correta é ${}^4A_2$.

Opção (D)

2.

$$6^{k-1} = 2^k \Leftrightarrow 6^{-1} \times 2^k \times 3^k = 2^k \Leftrightarrow 3^k = 6 \Leftrightarrow k = \log_3 6 \Leftrightarrow k = 1 + \log_3 2$$

Opção (A)

3. $\lim \dfrac{\sqrt{n}+n}{n} = \lim \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) = 1^+$

$$\lim\left(f\left(x_n\right)\right) = \lim\left(\ln\left(x_n - 1\right)\right) = \ln\left(0^+\right) = -\infty$$

Opção (D)

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{kx}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{kx}-1}{2kx} \times k = \dfrac{k}{2} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ kx\to 0}} \dfrac{e^{kx}-1}{kx} = \dfrac{k}{2} \times 1 = \dfrac{k}{2}$

$$\frac{k}{2} = 3 \Leftrightarrow k = 6$$

$$g\left(x\right) = \ln\left(6-x\right).\ D_g = \left\{x \in \mathbb{R}:\ 6 - x > 0\right\} = \left]-\infty, 6\right[$$

Opção (B)

5. Das seis posições, escolhe-se duas para os algarismos iguais: ${}^6C_2$
Os restantes quatro algarismos são diferentes e podem permutar entre si: $4!$
O número total é dado por: ${}^6C_2 \times 4!$

Opção (A)

GRUPO II

1.

1.1. O vértice A pertence a Ox. Então, tem-se: $A(x,0,0)$

O vértice A pertence à reta AV. Então, tem-se: $\frac{3-x}{6}=\frac{0-4}{8} \wedge y=0$

Daqui resulta que $\frac{3-x}{6}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=6$. As coordenadas do vértice A são $(6, 0, 0)$.

1.2. O plano $z=2$ interseta a aresta $[AV]$ num ponto P.

Determinação das coordenadas do ponto P:

$$\frac{3-x}{6}=\frac{z-4}{8} \wedge y=0 \wedge z=2 \Leftrightarrow \frac{3-x}{6}=-\frac{1}{4} \wedge y=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2} \wedge y=0 \wedge z=0$$

$P\left(\frac{9}{2}, 0, 2\right)$.

Seja Q o vértice do quadrado pertencente à aresta $[BV]$ as coordenadas de Q são $\left(0,\frac{9}{2},2\right)$.

A medida do lado do quadrado é igual a $\overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{9}{2}\right)^2+(2-2)^2}=\sqrt{2\times\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

A medida da área do quadrado é dada por $\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2$, ou seja, $\frac{81}{2}$.

2.

2.1. Se $x \neq 0$, a função é contínua pois é definida pelo quociente e soma de funções contínuas.

Se $x = 0$, tem-se:

- $f(0) = k + 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x}{e^x - 1} + k\right) = k + \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}} = k + \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = k + 1$

Conclui-se que a função é contínua em $x = 0$. Logo, é contínua em $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

2.2. $k = 2$, tem-se:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} + 2 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 3 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Estudo das assíntotas, quando $x \to +\infty$:

$y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{e^x - 1} + \frac{2}{x}\right) = 0 + 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{e^x - 1} + 2\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} + 2\right) = \frac{1}{+\infty - 0} + 1 = 2$$

A reta $y = 2$ é assíntota do gráfico, quando $x \to +\infty$.

Estudo das assíntotas, quando $x \to -\infty$:

$y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{e^x - 1} + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{0 - 1} + 0 = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x}{e^x - 1} + x + 2\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x + xe^x - x}{e^x - 1} + 2\right)$$

$= \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{xe^x}{e^x - 1} + 2\right)$. Fazendo $y = -x$, tem-se:

$$= \lim_{y \to +\infty}\left(\frac{-ye^{-y}}{e^{-y} - 1} + 2\right) = \lim_{y \to +\infty}\left(\frac{-y}{e^y\left(e^{-y} - 1\right)} + 2\right) = \lim_{y \to +\infty}\left(\frac{y}{e^y} \times \frac{-1}{e^{-y} - 1} + 2\right)$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\times\frac{-1}{e^{-y}-1}+2\right)=\frac{1}{+\infty}\times 1+2=2$$

A reta $y=-x+2$ é assíntota oblíqua, quando $x\to-\infty$.

3. $f(x)=0 \Leftrightarrow x\ln(x)-x=0 \Leftrightarrow x(\ln(x)-1)=0 \Leftrightarrow (x=0 \vee \ln x=1)\wedge x>0 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}$

O ponto *A* tem coordenadas $(\mathrm{e},0)$.

$$f'(x)=(x\ln(x)-x)'=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$$

Declive da reta *r*: $f'(2)=\ln \mathrm{e}=1$

As retas *r* e *s* são perpendiculares, então o declive da reta *s* é igual a -1 .

Coordenadas do ponto *B*:

$$f'(x)=-1 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)-\frac{1}{\mathrm{e}}=-\frac{2}{\mathrm{e}}$$

As coordenadas do ponto *B* são $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$.

4.

4.1. $f(x)=(k-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $k\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[(k-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{k-x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\times\frac{x^2}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}$$

Considerando $y=\frac{x^2}{2}$, tem-se:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\times\frac{x^2}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}=\frac{k}{+\infty}-2\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^y}=0-2\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^y}{y}}=0-2\times\frac{1}{+\infty}=0$$

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, conclui-se que $y=0$ é assíntota do gráfico da função.

4.2. $f\left(x\right)=\left(k-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $k\in\mathbb{R}$

$$f'\left(x\right)=-2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+\left(k-x^2\right)\left(-x\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(-2-k+x^2\right)$$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(-2-k+x^2\right)0=\Leftrightarrow x=0\vee -2-k+x^2=0\Leftrightarrow x=0\vee x^2=k+2$$

Se $k+2<0$, ou seja, $k<-2$ as derivadas têm um único zero.

4.3. $f\left(1\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \left(k-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=0\Leftrightarrow\; k-1=0 \;\Leftrightarrow\; k=1$

Então, tem-se $f\left(x\right)=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

$$f'\left(x\right)=-2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+\left(1-x^2\right)\left(-x\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\left(x-x^3\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(-2x-x+x^3\right)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^3-3x\right)$$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^3-3x\right)=0 \;\Leftrightarrow\; x\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\sqrt{3}\vee x=-\sqrt{3}$$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	–	–	–	0	+	+	+
x^2-3	+	0	–	–	–	0	+
$f'\left(x\right)$	–	0	+	0	–	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

As abcissas dos pontos em que há extremos são: $-\sqrt{3}$; 0 e $\sqrt{3}$

5.

5.1. $d(t)=540-5t+20\mathrm{e}^{-1,5t}$

$d(0)=540-5\times0+20\mathrm{e}^{-1,5\times0}=540+20=560$

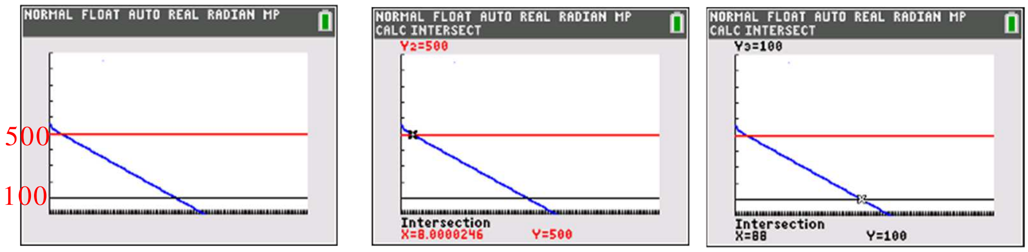
A distância percorrida pelo paraquedista, em queda livre, até à abertura do paraquedas é de 560 metros.

5.2. Inserem-se na calculadora as expressões:

$d(t)=540-5t+20\mathrm{e}^{-1,5t}$

$y=500$

$y=100$



Obtêm-se os pontos de coordenadas $(88,\,100)$ e, aproximadamente, $(8,\,500)$, o que significa que, ao fim de 8 segundos, o paraquedista está a 500 metros do solo e ao fim de 88 segundos está a 100 m do solo.

Então, a câmara esteve ligada cerca de 80 segundos, ou seja, 1 minuto e 20 segundos.

FIM