Teste de Matemática A

2016 / 2017

Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

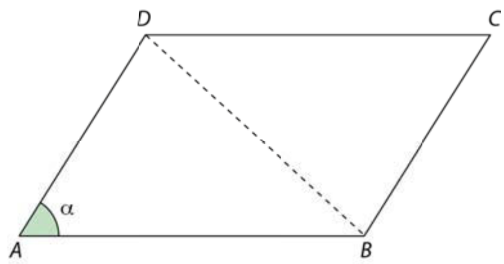
11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ____ Turma: ____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais **só uma** está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a esse item.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

1. Na figura está representado um paralelogramo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 5$ u.c.
- $\overline{BC} = 3{,}2$ u.c.
- $\overline{BD} = 3{,}8$ u.c.

Seja α a amplitude do ângulo BAD $(\alpha \in]0°, 90°[)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\sin(90° - \alpha) = -\frac{13}{20}$

(B) $\cos(180° + \alpha) = -\frac{13}{20}$

(C) $\sin(180° - \alpha) = \frac{13}{20}$

(D) $\cos(90° + \alpha) = \frac{13}{20}$

2. De dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabe-se que:

- $||\vec{u}|| = 3$ u.c.
- $||\vec{v}|| = 5$ u.c.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

Qual é o valor de $||\vec{u} - \vec{v}||$?

(A) 8 u.c.

(B) 6 u.c.

(C) 4 u.c.

(D) 2 u.c.

3. Considere uma sucessão (u_n) tal que:

- (u_n) é uma progressão geométrica de razão positiva;
- $u_3 = 8$ e $u_9 = 64$.

Qual é a soma dos 10 primeiros termos desta sucessão?

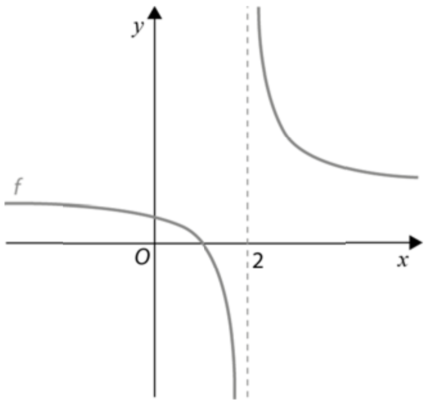
(A) $124(1+\sqrt{2})$

(B) $120(1+\sqrt{2})$

(C) $66(1+\sqrt{2})$

(D) $248(1+\sqrt{2})$

4. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função racional f, cujo domínio é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de f.



Considere a sucessão de termo geral $x_n = \frac{2n-1}{n}$. Seja $u_n = f(x_n)$.

Qual dos seguintes é o valor de $\lim u_n$?

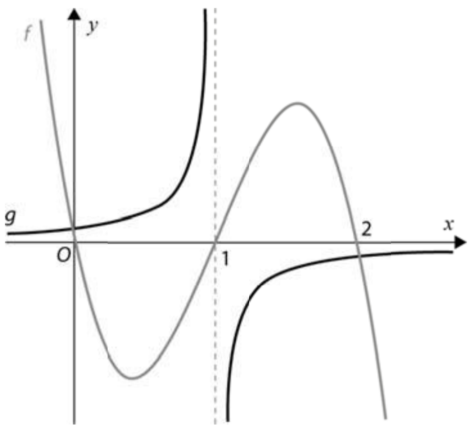
(A) 2

(B) 0

(C) $+\infty$

(D) $-\infty$

5. Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g, sendo f uma função polinomial de grau 3 e g uma função racional.



O gráfico de f interseta o eixo Ox nos pontos de abcissas 0, 1 e 2. As retas de equações $x = 1$ e $y = 0$ são assíntotas ao gráfico de g.

Qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(B) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

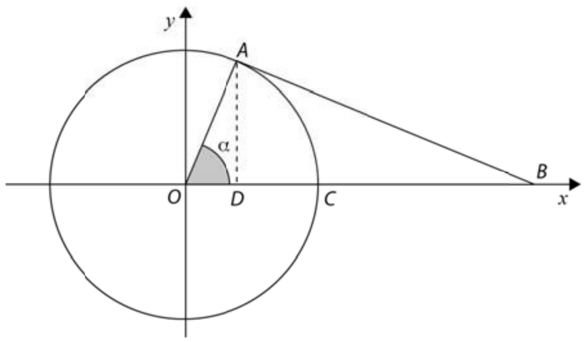
(C) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

(D) $\lim_{x\to 2^-} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

Grupo II

> Nas respostas aos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.
>
> **Atenção:** Quando para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Na figura encontra-se representada a circunferência trigonométrica e um triângulo $[ABO]$.
O ponto A pertence à circunferência e o ponto C é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox. A reta AB é tangente à circunferência no ponto A.
Seja α a amplitude do ângulo COA $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.



1.1. Mostre que a área do triângulo $[ABO]$ é dada, em função de α, por $A(\alpha) = \frac{1}{2}\tan\alpha$.

1.2. Considere o ponto A que se obtém para $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Determine uma equação reduzida da reta AC.

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(1, 2, -2)$, $B(2, -3, -1)$ e $C(-1, -2, 3)$.

2.1. Determine os valores de k tais que o vetor $(k^2 - 1, k, 1 - k)$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$.

2.2. Mostre que os pontos A, B e C definem um plano e escreva uma equação vetorial desse plano.

3. Considere a sucessão (u_n) definida por $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2^n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

3.1. Recorrendo ao método de indução matemática, mostre que $u_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.2. Considere a sucessão de termo geral $v_n = \frac{u_n}{3^n}$.

Prove que (v_n) é uma progressão geométrica e indique a sua razão.

3.3. Estude a sucessão (v_n) quanto à monotonia.

3.4. Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} v_n$. Determine $\lim S_n$.

4. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} k + \dfrac{2}{x-1} & se \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2} & se \quad x > 0 \wedge x \neq 2 \end{cases}$$

4.1. Determine k, sabendo que a função f é contínua em $x = 0$.

4.2. Considere agora $k = 0$. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

4.3. Resolva, em $\mathbb{R}^+\backslash\{2\}$, a inequação $f(x) > 0$.

4.4. A equação $f(x) = 3x$ tem exatamente duas soluções no intervalo $]0, 2[$. Utilizando a calculadora, determine-as graficamente. Apresente os valores arredondados às centésimas. Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora.

5. Seja f uma função, de domínio e contradomínio $\mathbb{R}^+$, tal que a reta de equação $y = 3x - 2$ é assíntota ao seu gráfico. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{x^2}{f(x)}$.

Mostre que a reta de equação $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ é assíntota ao gráfico de g.

– FIM –

COTAÇÕES

Grupo I	**50**
Cada resposta certa	10
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Grupo II	**150**
1.	25
1.1.	15
1.2.	10
2.	20
2.1.	10
2.2.	10
3.	40
3.1.	10
3.2.	10
3.3.	10
3.4.	10
4.	50
4.1.	15
4.2.	10
4.3.	15
4.4.	10
5.	15
TOTAL	**200**

TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (B)

Pela Lei dos Cossenos:

$3{,}8^2 = 5^2 + 3{,}2^2 - 2 \times 5 \times 3{,}2 \times \cos\alpha \Leftrightarrow 25 + 10{,}24 - 14{,}44 = 32\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{20{,}8}{32}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{13}{20}$

Logo, $\cos\ (180° + \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{13}{20}$.

2. Opção (B)

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\| &= \sqrt{(\|\vec{u} - \vec{v}\|)^2} = \\ &= \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} = \\ &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} = \\ &= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 =} \\ &= \sqrt{3^2 - 2 \times (-1) + 5^2 =} \\ &= \sqrt{9 + 2 + 25} = \\ &= \sqrt{36} = \\ &= 6\end{aligned}$$

3. Opção (A)

$u_9 = u_3 \times r^{9-3} \Leftrightarrow 64 = 8r^6 \Leftrightarrow r^6 = 8$

Como a razão desta progressão geométrica é positiva, então $r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$.

$u_3 = u_1 \times r^{3-1} \Leftrightarrow 8 = u_1 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow u_1 = \frac{8}{2} \Leftrightarrow u_1 = 4$

Então:

$$\begin{aligned}S_{10} &= 4 \times \frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^{10}}{1-\sqrt{2}} = 4 \times \frac{1-32}{1-\sqrt{2}} = \\ &= -124 \times \frac{1}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \\ &= -124 \times \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = \\ &= 124\left(1 + \sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

4. Opção (D)

$\lim x_n = \lim \frac{2n-1}{n} = \lim\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2^-$

Assim, $\lim u_n = \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.

5. Opção (C)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$

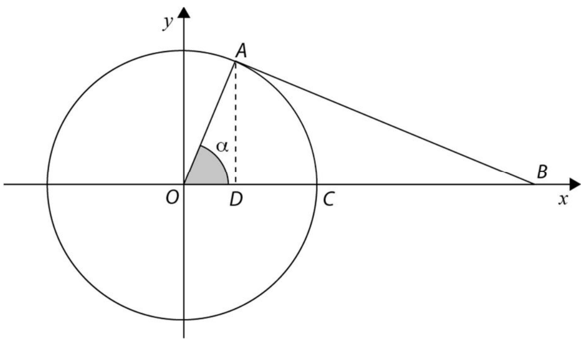
$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$ e $\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$, logo $\lim_{x\to1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

$\lim_{x\to0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(0)}{0^-} = -\infty$ (pois $g(0) > 0$) e $\lim_{x\to0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(0)}{0^+} = +\infty$ (pois $g(0) > 0$), logo não existe $\lim_{x\to0} \frac{g(x)}{f(x)}$.

$\lim_{x\to2^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(2)}{0^+} = -\infty$ (pois $g(2) < 0$).

Grupo II

1.



1.1. Seja D a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox.

$\overline{OD} = \cos\alpha$

$\overline{AD} = \sin\alpha$

$A\hat{B}O = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\tan(A\hat{B}O) = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\alpha}{\overline{DB}}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{\sin\alpha \times \sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

Assim:

$A_{[ABO]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{AD}}{2} = \frac{\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right) \times \sin\alpha}{2} =$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha} \times \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\alpha} \times \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}\tan\alpha$

1.2. $\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1-\frac{9}{16} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{7}{16}$

Como $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Assim, $A\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

$C(1,0)$

O declive da reta AC é $\frac{0-\frac{\sqrt{7}}{4}}{1-\frac{3}{4}} = -\sqrt{7}$.

A equação reduzida da reta AC é do tipo $y = -\sqrt{7}x + b$.

Como o ponto C pertence à reta AC, vem que :

$0 = -\sqrt{7} + b \Leftrightarrow b = \sqrt{7}$

Logo, a equação reduzida da reta AC é $y = -\sqrt{7}x + \sqrt{7}$.

2.

2.1. $\overrightarrow{AB} = (2,-3,-1)-(1,2,-2) = (1,-5,1)$

$$\begin{aligned}(1,-5,1)\cdot(k^2-1,k,1-k) = 0 &\Leftrightarrow k^2-1-5k+1-k = 0\\ &\Leftrightarrow k^2-6k = 0\\ &\Leftrightarrow k(k-6) = 0\\ &\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 6\end{aligned}$$

2.2. $\overrightarrow{AB}(1,-5,1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1,-2,3)-(1,2,-2) = (-2,-4,5)$

Como $\frac{1}{-2} \neq \frac{-5}{-4} \neq \frac{1}{5}$, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares, ou seja, os pontos A, B e C não são colineares, pelo que definem um plano.

$ABC\colon (x,y,x) = (1,2,-2)+s(1,-5,1)+t(-2,-4,5), s,t \in \mathbb{R}$

3.

3.1. Seja $P(n)\colon u_n = 2^n$

$P(1)\colon u_1 = 2^1 \Leftrightarrow 2 = 2$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $u_n = 2^n$

Tese: $u_{n+1} = 2^{n+1}$

Demonstração:

$u_{n+1} = u_n + 2^n = 2^n + 2^n = 2^n \times 2 = 2^{n+1}$

Provámos que $P(1)$ é uma proposição verdadeira e que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é uma proposição verdadeira, então $P(n+1)$ é uma proposição verdadeira.

Fica assim provado, usando o método de indução matemática, que $u_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.2. $v_n = \frac{u_n}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-n} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

Como $\frac{2}{3}$ é uma constante, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

3.3. Como (v_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{2}{3}$ e primeiro termo $v_1 = \frac{2}{3}$, isto é, $0 < r < 1$ e $v_1 > 0$, então (v_n) é uma sucessão decrescente.

3.4. $S_n = \sum_{i=1}^{n} v_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} =$

$= \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} =$

$= 2 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$\lim S_n = \lim \left[2 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right] = 2 \times (1-0) = 2$

4.

4.1. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(k + \frac{2}{x-1}\right) = k - 2 = f(0)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Para que f seja contínua em $x = 0$, tem de se verificar $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

Assim:

$k - 2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = \frac{7}{2}$.

4.2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = 1$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

4.3. Em $\mathbb{R}^+\backslash\{2\}$:

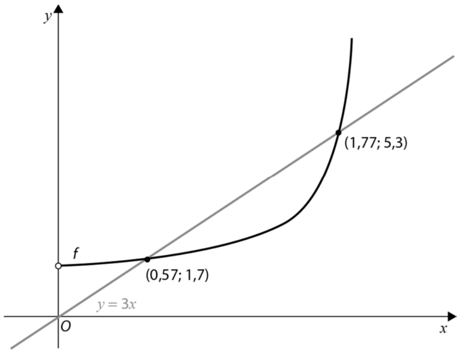
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} > 0$$

x	0		2		3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x-2}$	$+$	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Logo, C.S. $=]0,2[\cup]3,+\infty[$.

4.4. As soluções da equação $f(x) = 3x$, no intervalo $]0,2[$, são 0,57 e 1,77.



5. Como a reta de equação $y = 3x - 2$ é assíntota ao gráfico de f, tem-se que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ e $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 3x] = -2$. Assim:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{f(x)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{3}$$

e:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - \frac{1}{3}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{f(x)} - \frac{1}{3}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - xf(x)}{3f(x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3x - f(x)\right)}{3f(x)} =$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{f(x)} \times \left(f(x) - 3x\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \times (-2)\right) =$$

$$= \frac{2}{9}$$

Portanto, a reta de equação $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ é assíntota ao gráfico de g.