Proposta de teste de avaliação [outubro – 2018]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$.

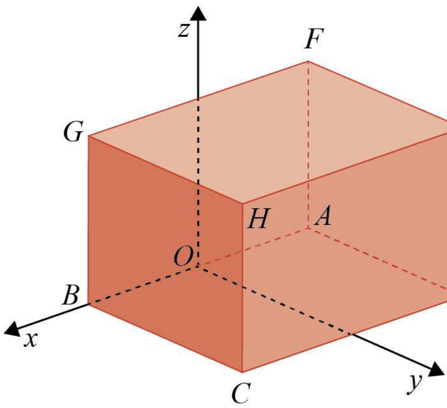
Sabe-se que:

. a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy;

. a face $[AFGB]$ está contida no plano xOz;

. o ponto O é o ponto médio de $[AB]$;

. o vértice H tem coordenadas $\left(4, \sqrt{27}, \pi\right)$.



O número de pontos de coordenadas inteiras que pertencem ao paralelepípedo é:

(A) 120 **(B)** 216 **(C)** 180 **(D)** 192

2. O código de um cofre é constituído por uma sequência de cinco dígitos.

Por exemplo, 07817.

2.1. Quantos códigos são representados por números maiores do que 20 000?

2.2. Quantos códigos existem com exatamente dois 3 e os restantes dígitos diferentes entre si?

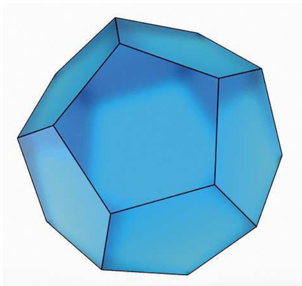
2.3. Quantos são os códigos que têm exatamente três dígitos iguais?

3. Aplicando o desenvolvimento do Binómio de Newton à expressão $\left(x-\sqrt{x}\right)^8$, há um termo em x^5. O coeficiente desse termo é:

(A) 56 **(B)** –28 **(C)** –56 **(D)** 28

4. Recorda a seguinte **Relação de Euler**:

"Num poliedro convexo, $V+F=A+2$, em que V representa o número de vértices, F o número de faces e A o número de arestas."



Na figura está representado um poliedro regular designado por **dodecaedro** com 12 faces e 30 arestas.

Determina o número de retas que é possível definir, a partir do conjunto de vértices do dodecaedro que não contenham arestas.

5. Numa escola há um pequeno auditório com 60 lugares distribuídos por 5 filas, cada uma com 12 lugares.

A turma A é constituída por 28 alunos, 12 rapazes e 16 raparigas, que vão assistir a um filme no auditório.

5.1. Um grupo de 6 alunos, 3 rapazes e 3 raparigas, vai resumir o filme e apresentá-lo a outras turmas.

O Rui e a Daniela são irmãos e fazem parte da turma.

Pretende-se que pelo menos um dos dois irmãos não faça parte do grupo.

Quantas são as possibilidades para formar o grupo?

5.2. Admite que os lugares são atribuídos de forma aleatória.

Determina a probabilidade de na primeira fila ficarem apenas 3 rapazes e 5 raparigas.

Apresenta o resultado arredondado às milésimas.

FIM (Caderno 1)

Cotações									Total
Questões – Caderno 1	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	
Pontos	10	10	10	10	10	12	12	12	**86**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

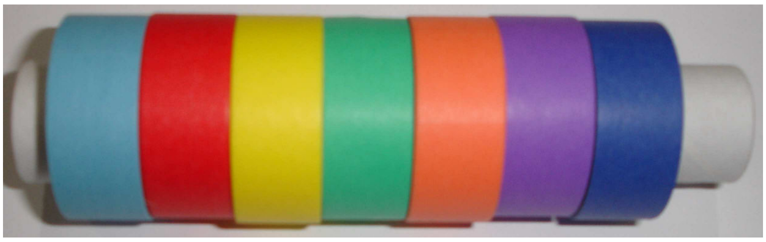
6. Na figura estão representados sete rolos de fita-cola de cores distintas.

6.1. Quantos grupos de quatro rolos é possível formar se o rolo amarelo:

a) fizer parte?

b) não fizer parte?

6.2. Os sete rolos vão ser colocados num porta-rolos, como é sugerido a seguir.



De quantas maneiras diferentes é possível fazer a distribuição, de modo que os rolos vermelho, verde e amarelo fiquem juntos por qualquer ordem?
Explica o teu raciocínio e indica uma expressão, sem calculares o valor, que corresponda à resposta.

7. Na figura está representado um tabuleiro e seis peças, três de cada tipo.
De quantas maneiras diferentes é possível distribuir as seis peças pelos nove lugares do tabuleiro, de modo que uma das diagonais fique preenchida com peças do mesmo tipo?

8. Na figura está representado um dado dodecaédrico com as faces numeradas de 1 a 12.

Considera a experiência aleatória que consiste em lançar o dado e registar o número da face que fica voltada para baixo.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "O número da face voltada para baixo é ímpar."

B: "O número da face voltada para baixo é múltiplo de 3."

Calcula $P\left(\overline{A \cup \overline{B}}\right)$.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

9. A seguir está representada parte de duas linhas consecutivas do Triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccc} & {}^{n}C_0 & & {}^{n}C_1 & & {}^{n}C_2 & \cdots \\ {}^{n+1}C_0 & & {}^{n+1}C_1 & & {}^{n+1}C_2 & & \cdots \end{array}$$

9.1. Se ${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = a$, mostra que ${}^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 = 1 + a + n$.

9.2. A diferença entre a soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal e a soma dos três primeiros elementos da linha anterior é 30. Recorre ao resultado obtido em **9.1.** para determinar o número total de elementos dessas duas linhas.

FIM (Caderno 2)

Cotações									Total
Questões – Caderno 1	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	
Pontos	10	10	10	10	10	12	12	12	**86**
Questões – Caderno 2	**6.1. a)**	**6.1. b)**	**6.2.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**		
Pontos	15	15	18	18	20	18	10		**114**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Seja X o conjunto das abcissas inteiras dos pontos do paralelepípedo.

$X=\{x\in\mathbb{Z}: -4\leq x\leq 4\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

$\# X=9$

Seja Y o conjunto das ordenadas inteiras dos pontos do paralelepípedo.

$Y=\left\{y\in\mathbb{Z}: 0\leq y<\sqrt{27}\right\}=\{0,1,2,3,4,5\}$

$\# Y=6$

Seja Z o conjunto das cotas inteiras dos pontos do paralelepípedo.

$Z=\{z\in\mathbb{Z}: 0\leq z<\pi\}=\{0,1,2,3\}$

$\# Z=4$

Seja A o conjunto de pontos de coordenadas inteiras do paralelepípedo.

$A=X\times Y\times Z=\{(x,y,z): x\in X\wedge y\in Y\wedge z\in Z\}$

$\# A=\# X\times Y\times Z=\# X\times\# Y\times\# Z=9\times 6\times 4=216$

Resposta: Opção (B)

2.1. $8\times {}^{10}A'_4-1=8\times 10^4-1=79999$

Resposta: 79 999 códigos

2.2. ${}^5C_2\times {}^9A_3=10\times 504=5040$

Resposta: 5040 códigos

2.3. $10\times {}^5C_3\times {}^9A'_2=10\times 10\times 9^2=8100$

Resposta: 8100 códigos

3. $\left(x-\sqrt{x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}{}^8C_k x^{8-k}\left(-\sqrt{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\,{}^8C_k x^{8-k+\frac{k}{2}}=\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\,{}^8C_k x^{\frac{16-k}{2}}$

O termo em x^5 surge quando $\dfrac{16-k}{2}=5$, ou seja, $k=6$.

O termo correspondente a $k=6$ é $(-1)^6\,{}^8C_6x^5$.

O coeficiente deste termo é $(-1)^6\,{}^8C_6=28$.

Resposta: Opção (D)

4. Como $V+F=A+2$, tem-se $V+12=30+2$, ou seja, $V=20$.

Número de retas definidas pelo conjunto dos vértices: ${}^{20}C_2=190$

Número de retas definidas pelos vértices que não contêm arestas: ${}^{20}C_2-30=190-30=160$

Resposta: 160 retas

5.1. O Rui faz parte do grupo e a Daniela não: ${}^{11}C_2\times{}^{15}C_3=25\ 025$

ou

A Daniela Faz parte do grupo e o Rui não: ${}^{11}C_3\times{}^{15}C_2=17\ 325$

ou

O Rui e a Daniela Não fazem parte do grupo: ${}^{11}C_3\times{}^{15}C_3=75\ 075$

Número total de maneira para formar o grupo: $25\,025+17\,325+75\,075=117\,425$

Resposta: 117 425

5.2. Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_3\times{}^{16}C_5\times{}^{12}A_8\times{}^{48}A_{20}$

Número de casos possíveis: ${}^{60}A_{28}$

Seja P a probabilidade pedida.

$$P=\frac{{}^{12}C_3\times{}^{16}C_5\times{}^{12}A_8\times{}^{48}A_{20}}{{}^{60}A_{28}}$$

$P\approx 0,025$

Resposta: $0,025$

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

6.1. **a)** $^6C_3 = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} = \dfrac{3!\times4\times5\times6}{3!\times6} = 20$

Resposta: 20 grupo de quatro rolos

b) $^6C_4 = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{4!\times5\times6}{4!\times2} = 15$

Resposta: 15 grupo de quatro rolos

6.2. Os três rolos, vermelho, verde e amarelo, formam um grupo que se irá juntar aos restantes quatro rolos.

Os quatro rolos mais o grupo de três rolos (cinco elementos) podem permutar entre si de $5!$ maneiras. O grupo de três rolos também podem permutar entre si de 3! maneiras.

Assim, o número total de maneiras é dado por $5!\times3!$.

Resposta: $5!\times3!$

7. Existem duas diagonais.

O preenchimento de uma diagonal com peças iguais tem duas possibilidades.

Restam seis lugares para escolher um subconjunto de três lugares para as peças que não ficam na diagonal.

Assim, tem-se:

$$2\times2\times{}^6C_3 = 4\times\frac{6!}{3!\times3!} = 4\times\frac{3!\times4\times5\times6}{3!\times6} = 80$$

Resposta: 80

8. $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ e $B=\{3,6,9,12\}$

$P\left(\overline{A\cup\overline{B}}\right) = P\left(\overline{A}\cap B\right)$

Como $\overline{A}\cap B=\{6,12\}$, tem-se $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

Resposta: $\dfrac{1}{6}$

9.1. $^{n}C_0 + {^{n}C_1} + {^{n}C_2} = a$

Pretende-se mostrar que $^{n+1}C_0 + {^{n+1}C_1} + {^{n+1}C_2} = 1 + a + n$.

Sabe-se que:

. $^{n}C_1 = n$

. $^{n+1}C_0 = 1$

. $^{n+1}C_1 = {^{n}C_0} + {^{n}C_1}$

. $^{n+1}C_2 = {^{n}C_1} + {^{n}C_2}$

Então:

$$^{n+1}C_0 + {^{n+1}C_1} + {^{n+1}C_2} = 1 + {^{n}C_0} + {^{n}C_1} + {^{n}C_1} + {^{n}C_2} = 1 + {^{n}C_0} + {^{n}C_1} + {^{n}C_2} + {^{n}C_1} = 1 + a + n$$

Assim, conclui-se que $^{n+1}C_0 + {^{n+1}C_1} + {^{n+1}C_2} = 1 + a + n$, sendo $^{n}C_0 + {^{n}C_1} + {^{n}C_2} = a$.

9.2. Soma dos três primeiros elementos de uma linha do Triângulo de Pascal:

$^{n}C_0 + {^{n}C_1} + {^{n}C_2} = a$

Soma dos três últimos elementos da linha seguinte:

$^{n+1}C_{n+1} + {^{n+1}C_n} + {^{n+1}C_{n-1}} = {^{n+1}C_0} + {^{n+1}C_1} + {^{n+1}C_2} = 1 + a + n$

Então, $1 + a + n - a = 30$. Daqui resulta que $n = 29$.

Na linha em que $n = 29$ há 30 elementos e na linha seguinte há 31.

Assim, nas duas linhas há 61 elementos no total.