Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de Teste **[maio 2017]**

Porto Editora

Nome: ____

Ano / Turma: __________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1.ª Parte

Para cada questão indica a opção que consideras correta.

1. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left]3, +\infty\right[$
- $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

O conjunto-solução da inequação $\dfrac{g(x)}{f(x)} \geq 0$ é:

(A) $\left[1, 3\right[$ **(B)** $\left]-\infty, 1\right] \cup \left]3, +\infty\right[$

(C) $\left]1, 3\right]$ **(D)** $\left]-\infty, 1\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

2. Sejam f e g, funções reais de variável real, tais que:

- f tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e é definida por $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$;
- $g(x) = 2 - f(x+3)$

Seja P o ponto de interseção das assíntotas do gráfico de g. As coordenadas do ponto P são:

(A) $(2, 1)$ **(B)** $(-1, 3)$

(C) $(5, 1)$ **(D)** $(-1, 1)$

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$.

Sabe-se que a reta de equação $y = -3x + 1$ é assíntota oblíqua do gráfico de f.

Então, pode-se concluir que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x) - 3}{x}$ é igual a:

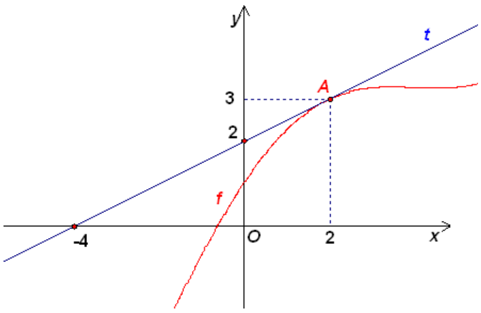
(A) $-\infty$ **(B)** -3

(C) 0 **(D)** 1

4. Na figura estão representadas uma reta t e parte do gráfico de uma função f.

Sabe-se que:

- a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto $A(2, 3)$;
- a reta t interseta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-4, 0)$;
- a reta t interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 2)$.



Pode concluir-se que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-3}{h}$ é igual a:

(A) 2

(B) 1

(C) $\dfrac{1}{2}$

(D) -2

5. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por uma expressão do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Sabe-se que:

- $x_1 < x_2$
- $f(x_1) = f(x_2)$

Em relação a $f'\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ pode concluir-se que:

(A) Não existe.

(B) É igual a 1.

(C) É igual a $\dfrac{1}{2}$.

(D) É igual a 0.

2.ª Parte

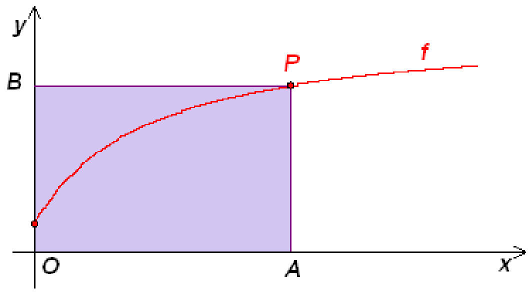
Dá respostas completas apresentando todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por:

$$f(x)=\frac{4x+1}{x+2}$$

1.1. O gráfico de f admite uma única assíntota.
Determina a equação dessa assíntota.

1.2. Na figura está representada a função f.



Sabe-se que:

- o ponto P pertence ao gráfico de f e tem abcissa positiva;
- o ponto A é a projeção ortogonal de P sobre Ox;
- o ponto B é a projeção ortogonal de P sobre Oy.

Determina:

a) a área do retângulo $[OAPB]$, se a ordenada do ponto P for $\frac{7}{2}$;

b) a abcissa do ponto P, para que $[OAPB]$ seja um quadrado.

2. Considera a função g definida por:

$$g(x)=5x-\frac{2x}{x+1}$$

2.1. Resolve a inequação $g(x)\geq 0$. Apresenta a solução na forma de intervalo de números reais ou reunião de intervalos de números reais.

2.2. O gráfico de g admite uma assíntota oblíqua. Determina, na forma reduzida, uma equação dessa assíntota.

2.3. Há um ponto do gráfico de g, de abcissa não nula, em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta r definida pela equação vetorial
$(x,y)=(-1,2)+k(1,3),\ k\in\mathbb{R}$.

Determina as coordenadas desse ponto, começando por mostrar que

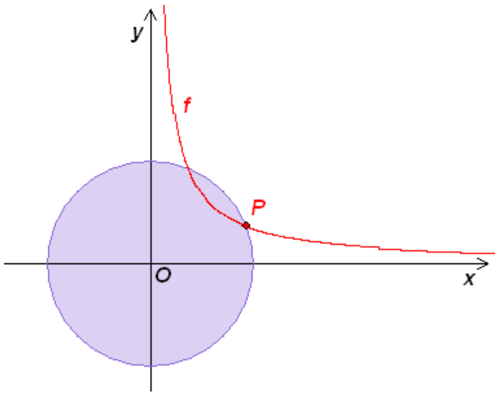
$$\forall x\in D_g,\ \ g'(x)=5-\frac{2}{(x+1)^2}$$

3. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+\dfrac{3}{4} & se\ x\leq 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} & se\ x>1 \end{cases}$$

3.1. Verifica se a função f é contínua em $x=1$.
3.2. Determina, na forma reduzida, uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 .

4. Na figura estão representados um círculo e o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}$.



Seja g a função que a cada valor de $x>0$ faz corresponder a área do círculo de centro O e raio $\overline{OP}$, sendo P um ponto móvel do gráfico de f.

4.1. Mostra que $g(x)=\pi\times\left(\dfrac{x^4+1}{x^2}\right)$.

4.2. Considera o círculo em que a medida da área é 8 . A circunferência que delimita esse círculo interseta o gráfico de f em dois pontos A e B, sendo a abcissa de A menor que a abcissa de B. Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina as abcissas dos pontos A e B. Apresenta os resultados arredondados às centésimas.

FIM

	Cotações														
	1.ª Parte					2.ª Parte									
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**1.1.**	**1.2.a)**	**1.2.b)**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**
Cotações	10	10	10	10	10	15	15	18	18	15	18	18	15	10	8

1.ª Parte

1. $f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-12}}{-2}$

A função *f* não tem zeros. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)<0$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$g(x)$	+	+	$(g(x)\leq 0)$		+
$f(x)$	–	–	–		–
$\dfrac{g(x)}{f(x)}$	–	–	$\dfrac{g(x)}{f(x)}\geq 0$		–

$\dfrac{g(x)}{f(x)}\geq 0 \Leftrightarrow x\in \left]1,3\right]$

Opção (C)

2. $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}=1+\dfrac{5}{x-2}$

Assíntotas do gráfico de *f*: $x=2$; $y=1$

$g(x)=2-f(x+3)$

Assíntotas do gráfico de *g*: $x=2-3=-1$; $y=-1+2=1$

Coordenadas do ponto de interseção das assíntotas: $(-1,1)$

Opção (D)

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{3}{x}\right)=-3+0=-3$

Opção (B)

4. Um vetor diretor da reta *t*: $(0-(-4),2-0)=(4,2)$

Declive da reta *t*: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$f'(2)=\frac{1}{2}$

Mas, $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-3}{h}$.

Opção (C)

5. O gráfico de *f* é uma parábola e a abcissa do vértice $\frac{x_1+x_2}{2}$. A reta tangente ao gráfico de *f* no vértice é paralela a *Ox*. Então, o declive dessa reta é 0.

Opção (D)

2.ª Parte

1.

1.1. $f(x)=\frac{4x+1}{x+2}$

Sabe-se que $D_f=\mathbb{R}_0^+$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=4$$

A reta de equação $y=4$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

1.2.a) $P\left(x,\frac{7}{2}\right)$

$f(x)=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{4x+1}{x+2}=\frac{7}{2}\wedge x\geq 0\Leftrightarrow\frac{8x+2-7x-14}{2(x+2)}=0\wedge x\geq 0$

$\Leftrightarrow x-12=0\wedge x\geq 0\Leftrightarrow x=12$

$P\left(12,\frac{7}{2}\right)$. A área do retângulo [*OAPB*] é dada por $12\times\frac{7}{2}$, ou seja, é igual a 42.

1.2.b) O retângulo [*OAPB*] é um quadrado se e só se $f(x)=x$.

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{4x+1}{x+2}=x \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+1}{x+2}=0 \wedge x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x+1=0 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{-2} \wedge x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2} \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}$$

[*OAPB*] é um quadrado se a abcissa de *p* for $1+\sqrt{2}$.

2.

2.1. $g(x)\geq 0 \Leftrightarrow 5x-\frac{2x}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2+3x}{x+1}\geq 0$.

Cálculo auxiliar:

$$5x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(5x+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{3}{5}$$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{3}{5}$		0	$+\infty$
$5x^2+3x$	+		+	0	–	0	+
$x+1$	–		+	+	+	+	+
$g(x)$	–		+	0	–	0	+

$$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-1,-\frac{3}{5}\right]\cup[0,+\infty[$$

2.2. Equação da assíntota é do tipo $y=mx+b$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x+1}\right)=5-0=5$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(5x-\frac{2x}{x+1}-5x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{1+\frac{1}{x}}\right)=-2$$

Equação da assíntota oblíqua: $y=5x-2$

2.3. Coordenadas de um vetor diretor da reta *r*: $(1,3)$

O declive da reta *r* é 3.

$$g'(x)=\left(5x-\frac{2x}{x+1}\right)'=5-\left(\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}\right)=5-\frac{2}{(x+1)^2}.$$

Seja $P(x,g(x))$ o ponto do gráfico de *g*, de abcissa não nula, no qual a reta tangente tem declive 3.

$$g'(x)=3 \Leftrightarrow 5-\frac{2}{(x+1)^2}=3 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2}=2 \Leftrightarrow (x+1)^2=1$$

$$\Leftrightarrow x+1=1 \vee x+1=-1 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$$

$$P(-2,g(-2))=(-2,-14)$$

3.

3.1.

$$f(1)=2-3+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(2x^2-3x+\frac{3}{4}\right)=2-3+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(x-1)(x+1)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{-(1-x)(x+1)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{-(x+1)\left(1+\sqrt{x}\right)}=-\frac{1}{4}$$

Conclui-se que $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\frac{1}{4}$. Daqui resulta, que *f* é contínua em $x=1$.

3.2. Ponto de tangência: $\left(0\,,\,f(0)\right)=\left(0\,,\frac{3}{4}\right)$

Se $x<1$, $f'(x)=\left(2x^2-3x+\frac{3}{4}\right)'=4x-3$

$f'(0)=-3$.

Equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto $\left(0\,,\frac{3}{4}\right)$: $y=-3x+\frac{3}{4}$

4.

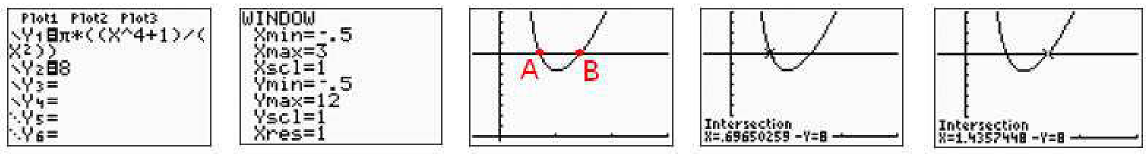
4.1. Raio do círculo: $\overline{OP}$.

$P\left(x,\frac{1}{x}\right)$

$$\overline{OP}=\sqrt{(x-0)^2+\left(\frac{1}{x}-0\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}$$

$$g(x)=\pi\left(\overline{OP}\right)^2=\pi\left(\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}\right)^2=\pi\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)$$

4.2. Recorrendo às capacidades da calculadora pretende-se resolver graficamente a equação $g(x)=8$.



As abcissas dos pontos A e B, arredondadas às centésimas, são $0{,}70$ e $1{,}44$, respetivamente.

FIM