06.

TESTES

Materiais disponíveis em formato editável em 20 AULA DIGITAL PROFESSOR

Cada teste inclui:

- Matriz de conteúdos
- Enunciado
- Cotações
- Soluções

Índice de conteúdos

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	6	5
Itens de construção	Resposta restrita	19	5 a 15

Itens	Domínios	Metas Curriculares
1.	FSS7	Definir sequências e sucessões.
2. e 3.	GM9	Definir e utilizar razões trigonométricas de ângulos agudos.
4.	ALG10	Definir e efetuar operações com radicais. Definir e efetuar operações com potências de expoente racional.
5.	GA10	Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do plano. Operar com vetores. Operar com coordenadas de vetores. Conhecer propriedades dos vetores diretores de retas do plano.
6.	LTC10	Operar com proposições. Relacionar condições e conjuntos.
7.	GA10	Definir referenciais cartesianos do espaço. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço. Definir vetores do espaço. Operar com coordenadas de vetores do espaço.
8.	FRVR10	Definir a composição de funções e a função inversa de uma função bijetiva. Relacionar propriedades geométricas dos gráficos com propriedades das respetivas funções. Estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções.
9.	ALG10	Efetuar operações com polinómios.
10. e 11.	EST10	Manipular o sinal de somatório. Utilizar as propriedades da média de uma amostra. Definir e conhecer as propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra. Definir e conhecer as propriedades do percentil de ordem *k*.

Teste de Diagnóstico

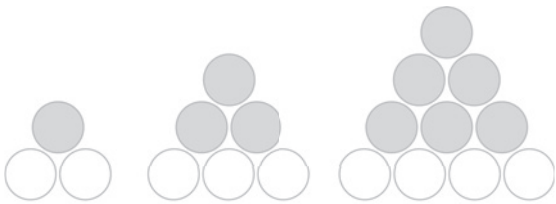
Matemática A

Duração do teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Na figura seguinte estão representados os três primeiros termos de uma sequência de conjuntos de círculos que segue a lei de formação sugerida.



1.1. Considere o termo com 8 círculos brancos. Quantos círculos cinzentos tem esse termo?

1.2. Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sequência do número total de círculos?

(A) $2n + 1$

(B) $\dfrac{n+5}{2}$

(C) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

(D) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

2. Considere um retângulo [*ABCD*]. Sabe-se que $\overline{BD} = \sqrt{3}$, sendo [*BD*] uma das diagonais do retângulo, e que x designa a amplitude do ângulo *ABD*. Mostre que a área do retângulo [*ABCD*] é dada por $a(x) = 3\operatorname{sen}x\cos x$.

3. Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ e que α é um ângulo agudo, tem-se que:

(A) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

(B) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

(C) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

(D) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$

4. Considere a expressão $\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt{a^3 b}\,\sqrt[4]{b}}{a^2\,\sqrt{b}}\right)^2$, onde a e b representam números reais positivos. Qual das seguintes expressões é equivalente à dada?

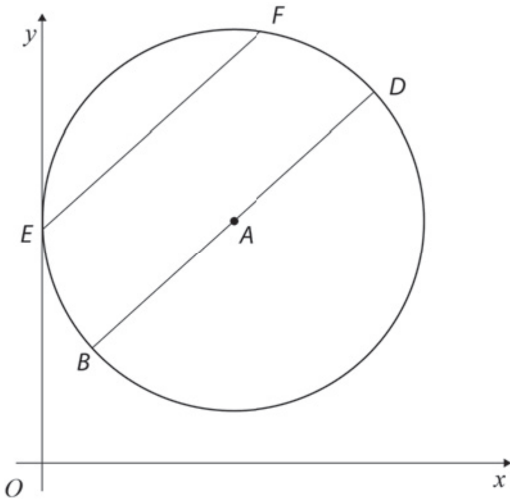
(A) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt{b}$

(B) $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}$

(C) $\sqrt{ab}$

(D) $\sqrt[3]{ab}$

5. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro A, definida pela equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.



Sabe-se que:

- $[BD]$ é um diâmetro da circunferência e está contido na reta de equação $y = x + 1$;
- a reta EF é paralela à reta BD e E é o ponto de tangência da circunferência com o eixo Oy.

5.1. Determine as coordenadas dos pontos A, B, E e F.

5.2. Calcule a distância entre os pontos E e F.

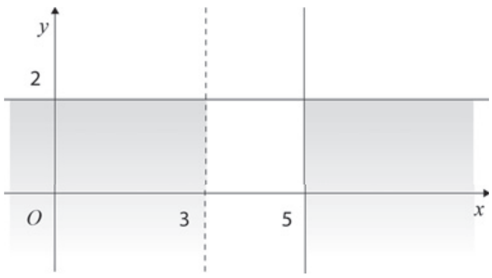
5.3. Escreva uma equação vetorial da reta EF.

5.4. Escreva a equação reduzida da reta mediatriz de $[EF]$.

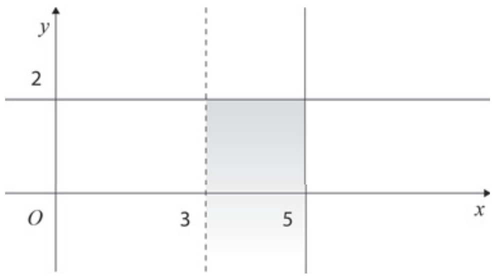
5.5. Determine as coordenadas de um vetor $\vec{u}$, colinear e com o mesmo sentido do vetor $\overrightarrow{EF}$ e de norma igual a $\sqrt{12}$.

6. Considere a condição $\sim\left(\left(x < 3 \vee x \geq 5\right) \wedge y \leq 2\right)$. Em qual das opções seguintes está representado, em referencial o.n. xOy, o conjunto de pontos definido por esta condição?

(A)



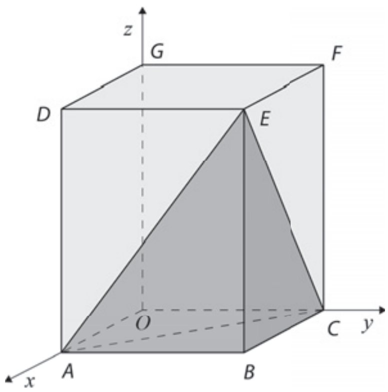
(B)



(C)

(D)

7. Na figura encontra-se representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular [*ABCODEFG*]. Sabe-se que a área do quadrado [*ABCO*] é 36 cm^2 e que $\overline{AD} = 8$ cm.



7.1. Determine o volume da pirâmide [*ABCE*].

7.2. Indique as coordenadas dos vértices da pirâmide [*ABCE*].

7.3. Defina por uma condição:

7.3.1. o plano *BEF*;

7.3.2. a reta *DE*;

7.3.3. a aresta [*BC*].

7.4. Complete de forma a obter proposições verdadeiras.

7.4.1. $A + \overrightarrow{OF} = \ldots$

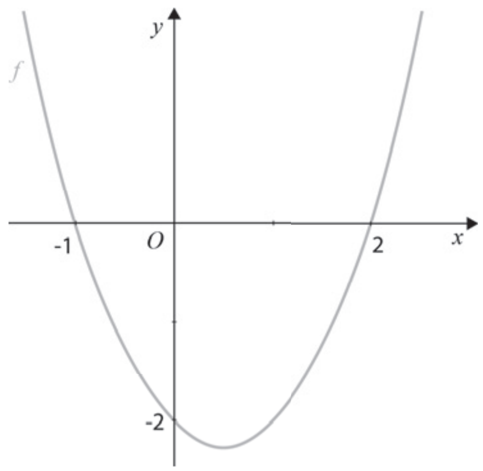
7.4.2. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EC} = \ldots$

7.4.3. $\overrightarrow{OF} + \ldots = \overrightarrow{AD}$

7.4.4. $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF}\right\| = \ldots$

7.5. Defina por uma condição a esfera da qual os pontos *D* e $H = B + \frac{1}{4}\overrightarrow{CF}$ são as extremidades do seu diâmetro.

8. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função quadrática *f*.



Seja *g* a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + 1$.

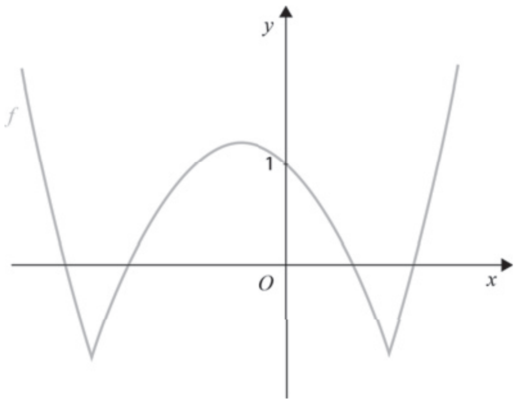
8.1. Determine o contradomínio da função *f*.

8.2. Tendo em conta o gráfico de *f* e a expressão analítica de *g*, resolva a inequação $f(x) \times g(x) < 0$.

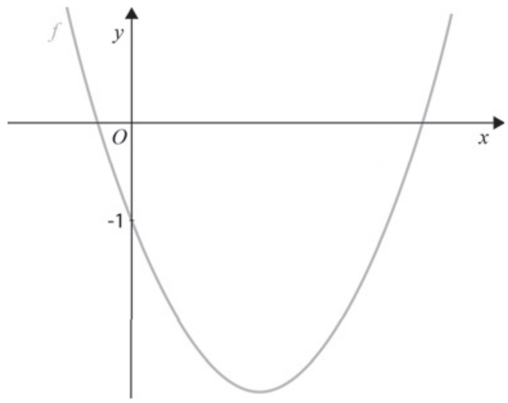
8.3. Determine o valor de $f^{-1}(-2) + g \circ f(2)$.

8.4. Qual dos gráficos seguintes representa a função *h* definida por $|f(x-1)| - 1$?

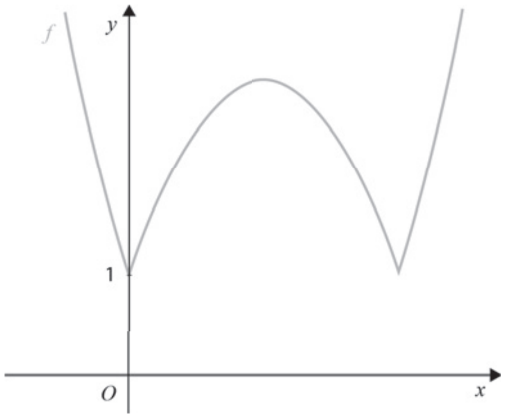
(A)



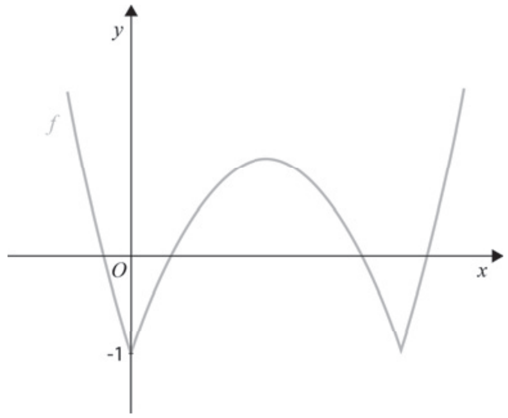
(B)



(C)



(D)



9. A equação $x^3 + 2x = 2x^2 + x$ é:

(A) impossível em $\mathbb{R}$.

(B) universal em $\mathbb{R}$.

(C) possível em $\mathbb{R}$ e o seu conjunto-solução é {0, 1}.

(D) possível em $\mathbb{R}$ e o seu conjunto-solução é {–1, 0, 1}.

10. Sejam $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $x_4 = 1$ e $x_5 = 7$. Calcule, apresentando, quando necessário, o resultado aproximado às décimas.

10.1. $\overline{x}$

10.2. SS_x

10.3. s_x

11. O quadro seguinte contém os valores de precipitação, em mm, do mês de maior precipitação na cidade do Porto, entre 2000 e 2014.

456,0	147,6	210,1
497,3	240,6	241,3
307,7	160,3	179,6
327,9	178,4	234,5
252,8	308,1	352,3

Calcule a mediana deste conjunto de dados.

- FIM -

Cotações

1.			10 pontos
	1.1.	5 pontos	
	1.2.	5 pontos	
2.			10 pontos
3.			5 pontos
4.			5 pontos
5.			45 pontos
	5.1.	15 pontos	
	5.2.	5 pontos	
	5.3.	5 pontos	
	5.4.	10 pontos	
	5.5.	10 pontos	
6.			5 pontos
7.			55 pontos
	7.1.	10 pontos	
	7.2.	5 pontos	
	7.3.	10 pontos	
	7.4.	15 pontos	
	7.5.	15 pontos	
8.			35 pontos
	8.1.	15 pontos	
	8.2.	10 pontos	
	8.3.	5 pontos	
	8.4.	5 pontos	
9.			5 pontos
10.			15 pontos
	10.1.	5 pontos	
	10.2.	5 pontos	
	10.3.	5 pontos	
11.			10 pontos
Total			**200 pontos**

1.
1.1. 28 círculos cinzentos.
1.2. Opção (D).
2. Ao cuidado do aluno.
3. Opção (B).
4. Opção (A).
5.
5.1. $A(2, 3)$; $B\left(2 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}\right)$; $E(0, 3)$; $F(2, 5)$
5.2. $\overline{EF} = 2\sqrt{2}$
5.3. $(x, y) = (0, 3) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$
5.4. $y = -x + 5$
5.5. $\vec{u}\left(\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$
6. Opção (C).
7.
7.1. 48 cm^3
7.2. $A(6, 0, 0)$; $B(6, 6, 0)$; $C(0, 6, 0)$; $E(6, 6, 8)$
7.3.
7.3.1. $y = 6$
7.3.2. $x = 6 \wedge z = 8$
7.3.3. $0 \leq x \leq 6 \wedge y = 6 \wedge z = 0$
7.4.
7.4.1. E
7.4.2. $\overrightarrow{OE}$
7.4.3. $\overrightarrow{ED}$, por exemplo.
7.4.4. 10
7.5. $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 \leq 18$
8.
8.1. $D'_f = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[$
8.2. $\text{C.S.} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, 2\right[$
8.3. 1
8.4. Opção (D).
9. Opção (C).
10.
10.1. 3,4
10.2. 21,2
10.3. $\approx 2{,}3$
11. 241,3

Teste n.º 1 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	10
Itens de construção	Resposta restrita	9	15 a 20

Domínios	Metas Curriculares
TRI11	Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos e resolver triângulos. Definir ângulos orientados e as respetivas medidas de amplitude. Definir rotações segundo ângulos orientados. Definir ângulos generalizados. Definir as razões trigonométricas dos ângulos generalizados. Definir medidas de ângulos em radianos. Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades. Definir funções trigonométricas inversas. Resolver problemas.

Teste n.º 1

Matemática A

Duração do teste: 90 minutos | Sem calculadora

11.º Ano de Escolaridade

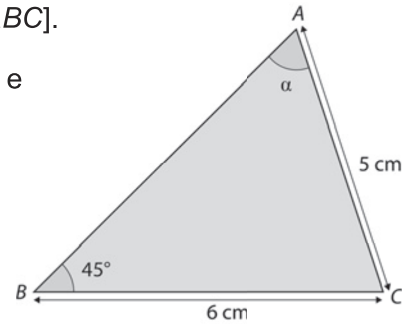
GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

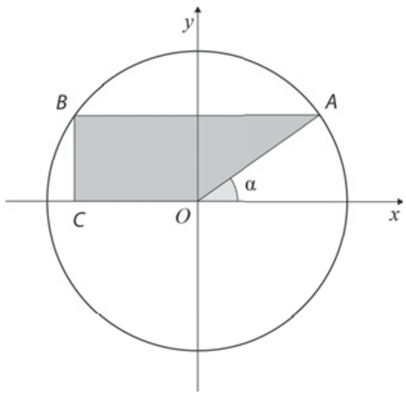
1. Na figura está representado um triângulo escaleno [*ABC*].

Sabe-se que $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $C\hat{B}A = 45°$ e $B\hat{A}C = \alpha$. Qual é o valor de sen α?

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ **(B)** $\frac{5}{6}$ **(C)** $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ **(D)** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$



2. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e um trapézio [*ABCO*].



Sabe-se que:

- os vértices *A* e *B* pertencem à circunferência;
- o lado [*OC*] está contido no eixo Ox;
- o lado [*CB*] é perpendicular ao eixo Ox;
- o lado [*AB*] é estritamente paralelo ao lado [*OC*].

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Qual das expressões seguintes indica a área do trapézio [*ABCO*] em função de α?

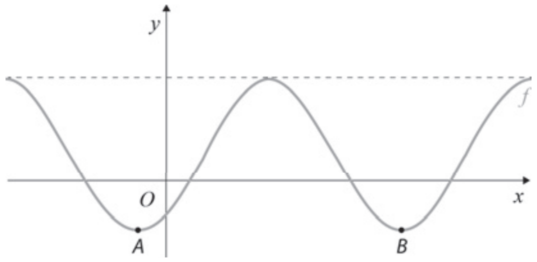
(A) $\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(C)** $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(D)** $\frac{5}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

3. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\forall x \in \left]0, \pi\right[, \text{sen}\, x \times \cos x > 0$ **(B)** $\exists x \in \left]\pi, 2\pi\right[: \text{sen}\, x \times \cos x < 0$

(C) $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} > 0$ **(D)** $\exists x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} < 0$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica *f* e os pontos *A* e *B*, pertencentes ao gráfico da função *f*, tais que $A\left(-\frac{\pi}{18}, -1\right)$ e $B\left(\frac{11\pi}{18}, -1\right)$.



Qual dos valores seguintes poderá ser um período da função *f*?

(A) 2π **(B)** $\frac{\pi}{3}$ **(C)** $\frac{5\pi}{9}$ **(D)** $\frac{2\pi}{3}$

5. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $\cos x = -\frac{1}{5}$.

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\text{sen}\, x = \frac{1}{5}$?

(A) $\theta + \pi$ **(B)** $\theta - \pi$ **(C)** $\theta + \frac{\pi}{2}$ **(D)** $\theta - \frac{\pi}{2}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5 - 3\,\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

1.1. Determine o contradomínio da função *f*.

1.2. Determine uma expressão geral dos maximizantes da função *f*.

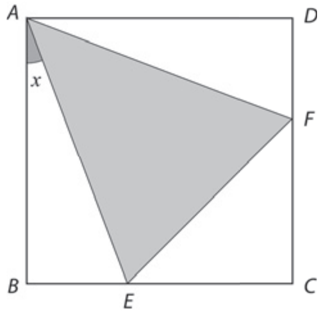
1.3. Prove que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 10$.

2. Considere a função g, de domínio $[-1, 0]$, definida por $g(x) = 3 + \arccos(2x + 1)$.

2.1. Determine $g(0)$ e $g\left(-\frac{1}{4}\right)$.

2.2. Resolva a equação $g(x) = 3 + \frac{\pi}{6}$.

3. Na figura está representado um quadrado [*ABCD*] de lado 1. O ponto *E* desloca-se sobre o lado [*BC*] e o ponto *F* desloca-se sobre o lado [*CD*], de tal forma que se tem sempre $\overline{AE} = \overline{AF}$. Para cada posição do ponto *E*, seja x a amplitude do ângulo *EAF* $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.



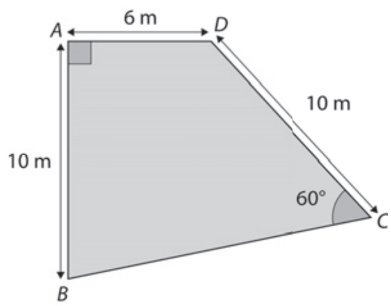
3.1. Mostre que a área do triângulo [*AEF*] é dada, em função de x, por

$$A(x) = 1 - \frac{1}{2\cos^2 x}.$$

3.2. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo [*AEF*] é igual a metade da área do quadrado [*ABCD*].

3.3. Para um certo valor de x, sabe-se que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{2}$. Determine, para esse valor de x, a área do triângulo [*AEF*].

4. Na figura está representado um quadrilátero [*ABCD*], retângulo em *A*.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 10\text{ m}$;
- $\overline{CD} = 10\text{ m}$;
- $\overline{DA} = 6\text{ m}$;
- $B\hat{C}D = 60°$.

Determine o valor do perímetro do quadrilátero [*ABCD*].

- FIM -

Cotações

GRUPO I		**50 pontos**
Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos
GRUPO II		**150 pontos**
1.		45 pontos
1.1.	15 pontos	
1.2.	15 pontos	
1.3.	15 pontos	
2.		30 pontos
2.1.	15 pontos	
2.2.	15 pontos	
3.		50 pontos
3.1.	20 pontos	
3.2.	15 pontos	
3.3.	15 pontos	
4.		25 pontos
Total		**200 pontos**

GRUPO I

1. Opção (C).
2. Opção (A).
3. Opção (B).
4. Opção (D).
5. Opção (D).

GRUPO II

1.

1.1. $D'_f = [2, 8]$

1.2. $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

1.3. Ao cuidado do aluno.

2.

2.1. $g(0) = 3$; $g\left(-\frac{1}{4}\right) = 3 + \frac{\pi}{3}$

2.2. $x = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$

3.

3.1. Ao cuidado do aluno.

3.2. $x = 0$

3.3. $A(x) = \frac{5}{18}$

4. $31 + \sqrt{61}$ m

Teste n.º 2 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	10
Itens de construção	Resposta restrita	11	10 a 15

Domínios	Metas Curriculares
TRI11	Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos e resolver triângulos. Definir ângulos orientados e as respetivas medidas de amplitude. Definir rotações segundo ângulos orientados. Definir ângulos generalizados. Definir as razões trigonométricas dos ângulos generalizados. Definir medidas de ângulos em radianos. Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades. Definir funções trigonométricas inversas. Resolver problemas.
GA11	Definir a inclinação de uma reta. Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores. Determinar equações de planos no espaço. Resolver problemas.

Teste n.º 2

Matemática A

Duração do teste: 90 minutos — Com calculadora

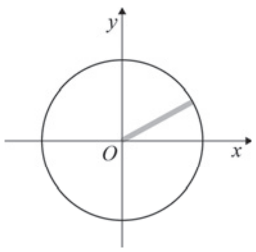
11.º Ano de Escolaridade

GRUPO I

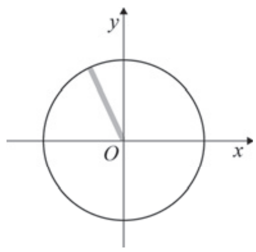
- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Em cada uma das figuras seguintes está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox. Em qual das figuras esse ângulo pode ter 1 radiano de amplitude?

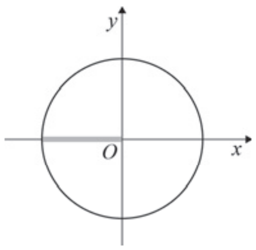
(A)



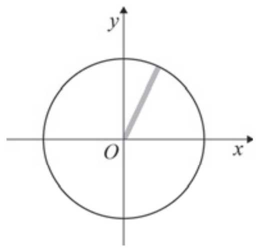
(B)



(C)



(D)



2. Considere a função f tal que $f(x) = \dfrac{1}{3 - \text{tg}^2 x}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\dfrac{\pi}{4} \in D_f$ **(B)** $\dfrac{\pi}{3} \in D_f$ **(C)** $\dfrac{\pi}{2} \in D_f$ **(D)** $\dfrac{2\pi}{3} \in D_f$

3. Seja *r* uma reta de inclinação $\alpha = 150°$. Qual das equações seguintes pode ser a equação reduzida da reta *r*?

(A) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ **(B)** $y = -\sqrt{3}x + 3$

(C) $y = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$

4. Considere um vetor $\overrightarrow{AB}$ tal que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$?

(A) 2 **(B)** –2 **(C)** 4 **(D)** –4

5. Sejam *a* e *b* números reais. Considere, num referencial o.n. xOy, a reta *r* e o plano α definidos, respetivamente, por:

$$\begin{cases} x = 1 + ak \\ y = 2 - 3k, k \in \mathbb{R} \\ z = bk \end{cases} \quad \text{e} \quad (x, y, z) = (1, 2, 3) + s(2, 1, 1) + t(1, 1, -1), s, t \in \mathbb{R}$$

Sabe-se que a reta *r* é perpendicular ao plano α. Qual é o valor de *a* e de *b*?

(A) $a = 1$ e $b = 1$ **(B)** $a = -1$ e $b = -1$

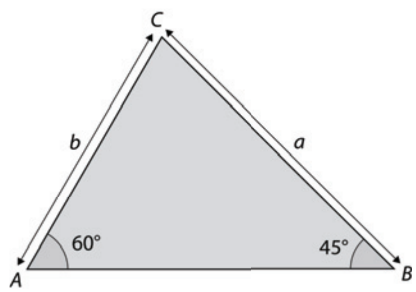
(C) $a = 2$ e $b = -1$ **(D)** $a = 2$ e $b = 1$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Na figura está representado o triângulo [*ABC*] tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $A\hat{B}C = 45°$ e $C\hat{A}B = 60°$. Sabendo que $a - b = \sqrt{3}$, determine o valor de *a*. Apresente o valor de *a* com o denominador racionalizado.



2. Considere a função *f*, definida em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, por $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x \cos x$.

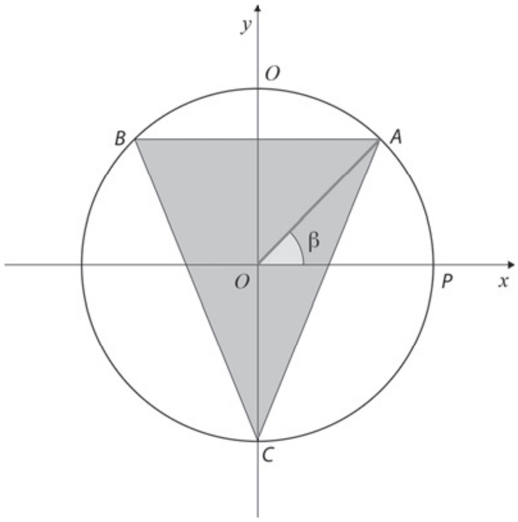
2.1. Determine, se existirem, os zeros da função *f*.

2.2. Sabendo que $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -2$, determine $f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

2.3. Na figura ao lado está representada a circunferência trigonométrica e um triângulo [*ABC*].

Sabe-se que:

- o ponto *A* se desloca sobre o arco *PQ*, nunca coincidindo com o ponto *Q*;
- a reta *AB* é paralela ao eixo Ox;
- o ponto *C* é a interseção da circunferência com o eixo Oy;
- β é a amplitude do ângulo $P\hat{O}A$.



Mostre que a área do triângulo [*ABC*] é dada por $f(\beta)$.

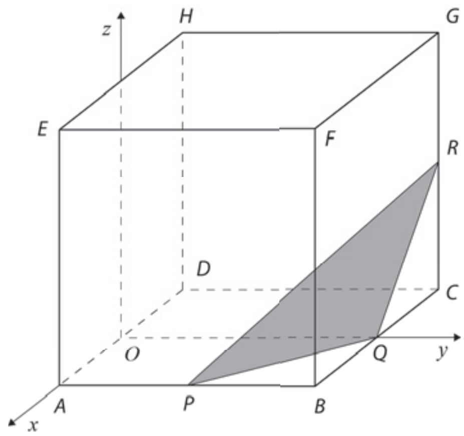
2.4. Mostre que $\dfrac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen} x} = f(x)$.

3. Considere os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$, $\|\vec{u}\| = 2$ e o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{u}+\vec{v}$ é $\dfrac{\pi}{4}$. Determine $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo [*ABCDEFGH*] de aresta 5.

Sabe-se que:

- $\overline{AP} = \overline{GR} = \dfrac{2}{5}\overline{AB}$;
- *Q* é o ponto médio de [*BC*] e pertence ao eixo Oy;
- os pontos *A* e *D* pertencem ao eixo Ox.



4.1. Considere um ponto *S*, com a mesma abcissa e a mesma ordenada do ponto *F*. Sabe-se que $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OS} = 50$. Determine a cota do ponto *S*.

4.2. Determine, em graus e com aproximação às décimas, a amplitude do ângulo $P\hat{Q}R$.

4.3. Escreva uma equação cartesiana simplificada que defina o plano que passa no vértice *G* e tem como vetor normal $\overrightarrow{BH}$.

4.4. Escreva uma equação vetorial que defina o plano *PQR.*

4.5. Escreva equações paramétricas que definam a reta *AG*.

- FIM -

Cotações

GRUPO I			**50 pontos**
Cada resposta certa			10 pontos
Cada resposta errada			0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada			0 pontos
GRUPO II			**150 pontos**
1.			15 pontos
2.			60 pontos
	2.1.	15 pontos	
	2.2.	15 pontos	
	2.3.	15 pontos	
	2.4.	15 pontos	
3.			15 pontos
4.			60 pontos
	4.1.	10 pontos	
	4.2.	15 pontos	
	4.3.	15 pontos	
	4.4.	10 pontos	
	4.5.	10 pontos	
Total			**200 pontos**

GRUPO I

1. Opção (D).
2. Opção (A).
3. Opção (D).
4. Opção (B).
5. Opção (C).

GRUPO II

1. $a = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

2.

2.1. *f* não tem zeros.

2.2. $-\frac{2 + 2\sqrt{5}}{5}$

2.3. Ao cuidado do aluno.

2.4. Ao cuidado do aluno.

3. $5\sqrt{2} - 4$

4.

4.1. $\frac{15}{4}$

4.2. $\approx 114{,}2^{\circ}$

4.3. $2x + 2y - 2z + 5 = 0$

4.4. $(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) + s\left(\frac{5}{2}, -3, 0\right) + t\left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right), s, t \in \mathbb{R}$

4.5. $\begin{cases} x = \frac{5}{2} - 5k \\ y = 5k, \ k \in \mathbb{R} \\ z = 5k \end{cases}$

Teste n.º 3 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	10
Itens de construção	Resposta restrita	13	10 a 15

Domínios	Metas Curriculares
GA11	Definir a inclinação de uma reta. Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores. Determinar equações de planos no espaço. Resolver problemas
SUC11	Caracterizar o conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais. Estudar propriedades elementares das sucessões reais. Utilizar o princípio de indução matemática. Calcular o termo geral de progressões aritméticas e geométricas. Calcular a soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas. Definir o limite de uma sucessão. Resolver problemas.

Teste n.º 3

Matemática A

Duração do teste: 90 minutos — Com calculadora

11.º Ano de Escolaridade

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Considere, num referencial o.n. xOy, a reta *r* de equação $x - 2y = 3$. Seja *s* a reta perpendicular a *r* que passa no ponto de coordenadas (1, 2).

Qual é a equação vetorial da reta *s*?

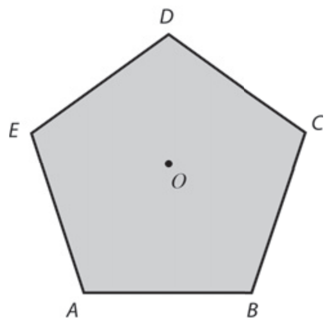
(A) $(x, y) = (1, 2) + k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y) = (1, 2) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y) = (1, 2) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y) = (1, 2) + k(1, -2), k \in \mathbb{R}$

2. Na figura está representado um pentágono regular de centro *O*.



Qual das afirmações seguintes é falsa?

(A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$

(B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} > 0$

(C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} < 0$

(D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} > 0$

3. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere o plano α definido pela equação:

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + s(1, 2, -1) + t(-1, 1, 2),\ s, t \in \mathbb{R}$$

No mesmo referencial, considere ainda a reta r definida por:

$$(x, y, z) = (1, 2, 2) + k(-1, 0, 1),\ k \in \mathbb{R}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O ponto (1, 0, 1) pertence à reta r.

(B) O ponto (1, 2, 2) pertence ao plano α.

(C) O vetor (1, 2, –1) é normal ao plano α.

(D) A reta r é perpendicular ao plano α.

4. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{2n - 1}{2n + 1}$$

Sabendo que esta sucessão é limitada, quais são, respetivamente, o conjunto dos minorantes e o conjunto dos majorantes?

(A) $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e $[1, +\infty[$

(B) $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e $]1, +\infty[$

(C) $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ e $]1, +\infty[$

(D) $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ e $[1, +\infty[$

5. Considere as seguintes afirmações.

(I) Um infinitésimo é uma sucessão monótona.

(II) Um infinitésimo é uma sucessão convergente.

(III) Um infinitésimo é uma sucessão limitada.

Em relação a estas afirmações, pode dizer-se que:

(A) as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

(B) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

(C) as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

(D) todas as afirmações são verdadeiras.

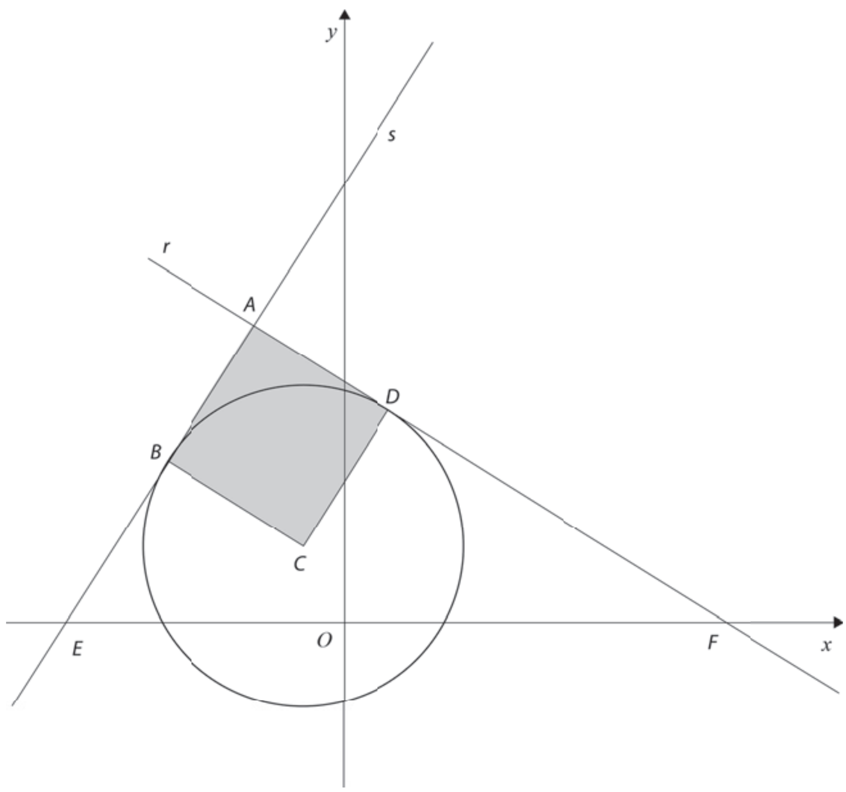
GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Na figura abaixo estão representados, num referencial o.n. xOy:

- a circunferência de centro *C* definida por $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$;
- os pontos *B*(−4, 4) e *D*(1, 5) pertencentes à circunferência;
- as retas *r* e *s* tangentes à circunferência em *D* e em *B*, respetivamente, e que se intersetam no ponto *A*;
- o quadrado [*ABCD*];
- os pontos *F* e *E*, pertencentes ao eixo Ox e às retas *r* e *s*, respetivamente.



1.1. Mostre que a equação reduzida da reta *s* é $y = \frac{3}{2}x + 10$.

1.2. Calcule o valor, em graus, da inclinação da reta *r*. Apresente o resultado aproximado às décimas.

1.3. Determine a área do triângulo [*AEF*]. Apresente o resultado aproximado às centésimas.

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- o plano α definido pela equação $x + 2y - z + 1 = 0$;
- a reta r definida por $(x, y, z) = (1, -1, 1) + k(-1, 1, 2), k \in \mathbb{R}$;
- o ponto $A(1, 3, -2)$.

2.1. Escreva uma equação cartesiana do plano β que contém o ponto A e que é paralelo ao plano α.

2.2. Defina através de uma equação vetorial e de uma equação cartesiana o plano γ definido pela reta r e pelo ponto A.

2.3. Determine, em graus, com aproximação às décimas, a amplitude do ângulo que o vetor $\vec{r}(-1, 1, 2)$ faz com o vetor $\vec{v}(1, 0, 0)$.

3. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.1. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

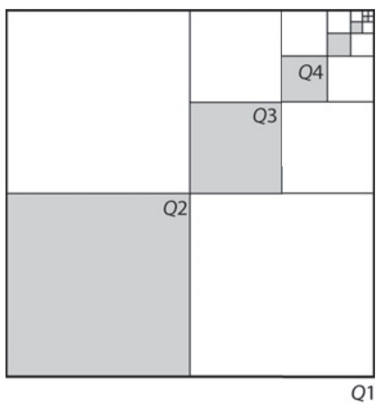
3.2. Justifique que (u_n) é uma progressão aritmética e escreva o seu termo geral.

3.3. Averigúe se a sucessão (u_n) é limitada. Indique, se existirem, um majorante e um minorante da sucessão.

3.4. Calcule $\sum_{k=5}^{20} u_k$.

4. Considere a sequência de quadrados representada abaixo, em que a área de cada quadrado sombreado é $\frac{1}{4}$ da área do quadrado anterior, ou seja:

- $A_{Q2} = \frac{1}{4} A_{Q1}$
- $A_{Q3} = \frac{1}{4} A_{Q2}$
- $A_{Q4} = \frac{1}{4} A_{Q3}$
- …



Seja (a_n) a sucessão das áreas dos quadrados sombreados.

A medida do comprimento do lado do quadrado maior é 2.

Mostre que:

4.1. (a_n) é uma progressão geométrica, indicando a respetiva razão e determine a sua expressão geral;

4.2. a soma dos *n* primeiros termos da sucessão é dada por:

$$S_n = \frac{16}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Classifique, quanto à convergência, a sucessão (S_n).

5. Usando o método de indução matemática, prove que:

$$1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + (4n - 3) = \frac{1}{2}n(4n - 2), \forall n \in \mathbb{N}$$

- FIM -

Cotações

GRUPO I		**50 pontos**
Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos
GRUPO II		**150 pontos**
1.		35 pontos
1.1.	10 pontos	
1.2.	10 pontos	
1.3.	15 pontos	
2.		35 pontos
2.1.	10 pontos	
2.2.	15 pontos	
2.3.	10 pontos	
3.		40 pontos
3.1.	10 pontos	
3.2.	10 pontos	
3.3.	10 pontos	
3.4.	10 pontos	
4.		25 pontos
4.1.	15 pontos	
4.2.	10 pontos	
5.		15 pontos
Total		**200 pontos**

GRUPO I

1. Opção (D).
2. Opção (B).
3. Opção (B).
4. Opção (A).
5. Opção (C).

GRUPO II

1.

1.1. Ao cuidado do aluno.
1.2. $\approx 146{,}3°$
1.3. $\approx 53{,}08$ u.a.

2.

2.1. $x + 2y - z - 9 = 0$
2.2. $11x + 3y + 4z - 12 = 0$
2.3. $\approx 114{,}1°$

3.

3.1. Sucessão crescente.
3.2. $d = 2;\ u_n = 2n + 2$
3.3. Minorante: 2
Majorante: não tem
A sucessão não é limitada.
3.4. 432

4.

4.1. $r = \dfrac{1}{4};\ a_n = 4^{2-n}$
4.2. (S_n) é uma sucessão convergente.

5. Ao cuidado do aluno.

Teste n.º 4 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	10
Itens de construção	Resposta restrita	12	5 a 20

Domínios	Metas Curriculares
SUC11	Caracterizar o conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais. Estudar propriedades elementares das sucessões reais. Utilizar o princípio de indução matemática. Calcular o termo geral de progressões aritméticas e geométricas. Calcular a soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas. Definir o limite de uma sucessão. Resolver problemas.
FRVR11	Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais. Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais. Definir assíntotas ao gráfico de uma função. Resolver problemas.

Teste n.º 4

Matemática A

Duração do teste: 90 minutos — Com calculadora

11.º Ano de Escolaridade

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Considere a sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) (a_n) não é monótona e é limitada.

(B) (a_n) é monótona e não é limitada.

(C) (a_n) não é monótona e não é limitada.

(D) (a_n) é monótona e é limitada.

2. Seja (b_n) uma progressão geométrica de razão 3. Se $b_3 = x - 1$ e $b_5 = 8x + 1$, qual é o valor de b_4?

(A) 11 **(B)** 18 **(C)** 27 **(D)** 33

3. Considere as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n) definidas por:

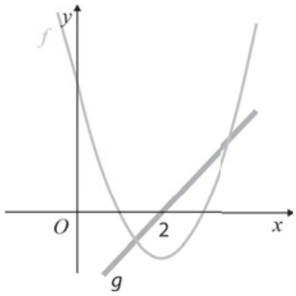
$$u_n = -\frac{1}{n^2}; \qquad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n; \qquad w_n = \frac{n^2}{n+2}$$

Quais destas sucessões são infinitésimos?

(A) (u_n) e (v_n) **(B)** (v_n) e (w_n)

(C) (u_n) e (w_n) **(D)** (u_n), (v_n) e (w_n)

4. Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções, *f* e *g*, contínuas em $\mathbb{R}$. O gráfico de *g* interseta o eixo *Ox* no ponto de abcissa 2. O valor de $\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ é:



(A) 0 **(B)** $+\infty$ **(C)** $-\infty$ **(D)** 1

5. Considere a função *g*, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, definida por $g(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$. Em qual das opções as duas equações apresentadas definem as assíntotas ao gráfico de *g*?

(A) $x = -2$ e $y = 2$ **(B)** $x = 2$ e $y = 2$

(C) $x = -2$ e $y = -2$ **(D)** $x = 2$ e $y = -2$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Considere a sucessão (a_n) definida por $a_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{2n}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

1.1. Mostre que a sucessão (a_n) é limitada.

1.2. Indique, justificando, o valor lógico das proposições.

1.2.1. $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n > 0$

1.2.2. $\exists n \in \mathbb{N}:\ a_n = \frac{16}{9}$

1.3. A sucessão (a_n) é convergente? Justifique.

2. De uma progressão aritmética (u_n), sabe-se que o terceiro termo é 12 e o décimo termo é 47.

2.1. Escreva o termo geral de (u_n).

2.2. Determine quantos termos da progressão se tem de considerar de forma a que a soma dos *n* primeiros termos seja 555.

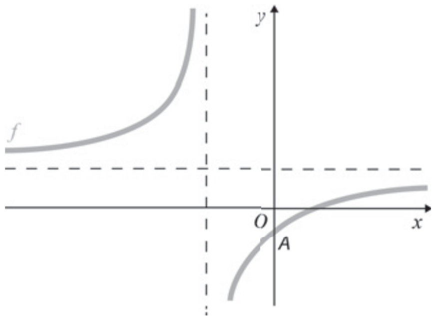
3. Considere a sucessão (v_n) definida por $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$.

3.1. Prove, usando o método de indução matemática, que $v_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

3.2. Calcule o limite da sucessão (v_n).

4. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função *f*. O gráfico interseta o eixo Ox no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$.

As retas $x = -\frac{4}{3}$ e $y = \frac{2}{3}$ são as assíntotas ao gráfico da função.



4.1. Defina a função *f* por uma expressão analítica do tipo $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

4.2. Determine as coordenadas do ponto *A* assinalado na figura.

5. Considere a função *g*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{3x - 1}{x - 1} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes.

5.1. Averigúe se a função *g* é contínua em $x = 0$.

5.2. Estude a função *g* quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

6. De uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a bissetriz dos quadrantes pares é uma assíntota ao seu gráfico. Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{x + 1}{f(x)}$. Prove que a reta de equação $y = -1$ é uma assíntota ao gráfico de *g*.

- FIM -

Cotações

GRUPO I		**50 pontos**
Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos
GRUPO II		**150 pontos**
1.		40 pontos
1.1.	10 pontos	
1.2.	20 pontos	
1.2.1. 10 pontos		
1.2.2. 10 pontos		
1.3.	10 pontos	
2.		25 pontos
2.1.	10 pontos	
2.2.	15 pontos	
3.		20 pontos
3.1.	15 pontos	
3.2.	5 pontos	
4.		20 pontos
4.1.	15 pontos	
4.2.	5 pontos	
5.		30 pontos
5.1.	15 pontos	
5.2.	15 pontos	
6.		15 pontos
Total		**200 pontos**

GRUPO I

1. Opção (A).
2. Opção (C).
3. Opção (A).
4. Opção (C).
5. Opção (A).

GRUPO II

1.

1.1. Ao cuidado do aluno.

1.2.

1.2.1. Proposição falsa.

1.2.2. Proposição verdadeira.

1.3. A sucessão (a_n) é convergente para 2.

2.

2.1. $u_n = 5n - 3$

2.2. 15

3.

3.1. Ao cuidado do aluno.

3.2. $\lim v_n = 1$

4.

4.1. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 4}$

4.2. $A\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$

5.

5.1. g não é contínua em $x = 0$.

5.2. $x = 0$; $y = 3$; $y = 0$

5.3. Ao cuidado do aluno.

Teste n.º 5 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	10
Itens de construção	Resposta restrita	8	10 a 30

Domínios	Metas Curriculares
FRVR11	Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais. Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais. Definir assíntotas ao gráfico de uma função. Resolver problemas. Definir a noção de derivada. Aplicar a noção de derivada à cinemática de um ponto. Operar com derivadas. Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções. Resolver problemas.

Teste n.º 5

Matemática A

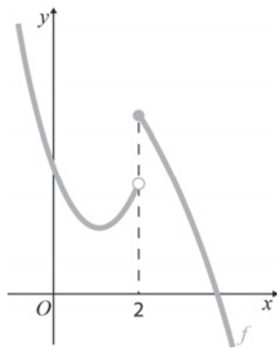
Duração do teste: 90 minutos — Com calculadora

11.º Ano de Escolaridade

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f*, real de variável real. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$ **(B)** $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = f(2)$

(C) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ **(D)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

2. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função *f* definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{k(x^2 + x - 2)}{x^2 - 1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) $-\dfrac{3}{2}$ **(B)** $\dfrac{3}{2}$ **(C)** $-\dfrac{2}{3}$ **(D)** $\dfrac{2}{3}$

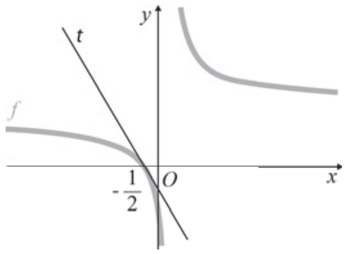
3. Considere uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Em qual das opções as duas retas apresentadas são as assíntotas ao gráfico da função *g* definida por $g(x) = f(x-2) + 1$?

(A) $x = 2$ e $y = 3$ **(B)** $x = -2$ e $y = 3$

(C) $x = 2$ e $y = 1$ **(D)** $x = -2$ e $y = 1$

4. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, definida por $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$;
- uma reta *t* tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $-\frac{1}{2}$.



Qual é a inclinação da reta *t*?

(A) 45° **(B)** 120° **(C)** 135° **(D)** 150°

5. Seja *f* uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a sua derivada, f', é tal que $f'(x) = x^2 - 1$. Relativamente a esta função, qual das afirmações seguintes é falsa?

(A) *f* é decrescente em $]-1, 1[$.

(B) *f* é crescente em $]1, +\infty[$.

(C) *f* tem um máximo para $x = -1$.

(D) *f* tem um mínimo para $x = -1$.

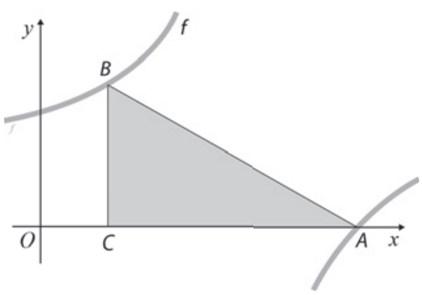
GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, definida por $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$;
- um triângulo retângulo [*ABC*], em que *A* é o ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo Ox, *B* é um ponto do gráfico de *f* de abcissa menor que 3 e *C* pertence ao eixo Ox.



1.1. Determine o domínio e o contradomínio da função *g*, onde $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

1.2. Considere a função *h*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(x) & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

1.2.1. Averigúe se a função *h* é contínua em $x = 1$.

1.2.2. Estude a função *h* quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

1.3. Considere a função *a* que à abcissa do ponto *B* faz corresponder a área do triângulo [*ABC*].

1.3.1. Mostre que $a(x) = \frac{-x^2 + 10x - 25}{2x - 6}$.

1.3.2. Determine as coordenadas do ponto *B* para as quais a área do triângulo é 4.

1.3.3. Estude a função *a* quanto à existência de assíntotas oblíquas ao seu gráfico.

1.4. Recorrendo à definição de derivada, calcule $f'(2)$.

2. A concentração *C* de um determinado medicamento na corrente sanguínea, *t* horas após ter sido administrado, é dada pela função:

$$C(t) = \frac{2t + 1}{t^2 + 20}$$

2.1. Aproximadamente quantas horas depois da administração do medicamento a sua concentração no sangue é máxima?

2.2. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} C(t)$. Explique o significado desse valor no contexto apresentado.

3. De uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a sua derivada, f', é definida por:

$$f'(x) = \frac{1 - 3x^2}{2\sqrt{x}\left(x^2 + 1\right)^2}$$

Sabe-se que o ponto $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ pertence ao gráfico de *f*.

3.1. Escreva uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1.

3.2. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\left(f(x)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{x^2 - 1}$.

- FIM -

Cotações

GRUPO I		**50 pontos**
Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos
GRUPO II		**150 pontos**
1.		90 pontos
1.1.	15 pontos	
1.2.	30 pontos	
1.2.1. 15 pontos		
1.2.2. 15 pontos		
1.3.	35 pontos	
1.3.1. 10 pontos		
1.3.2. 10 pontos		
1.3.3. 15 pontos		
1.4.	10 pontos	
2.		30 pontos
2.1.	15 pontos	
2.2.	15 pontos	
3.		30 pontos
3.1.	15 pontos	
3.2.	15 pontos	
Total		**200 pontos**

GRUPO I

1. Opção (B).
2. Opção (C).
3. Opção (A).
4. Opção (C).
5. Opção (D).

GRUPO II

1.

1.1. $D_g = \mathbb{R}\backslash\{5\}; D'_g = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

1.2.

1.2.1. *h* não é contínua em $x = 1$.

1.2.2. $y = \frac{1}{2}$ e $y = 0$

1.3.

1.3.1. Ao cuidado do aluno.

1.3.2. *B*(1, 2)

1.3.3. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

1.4. $f'(2) = 2$

2.

2.1. 4 horas.

2.2. $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = 0$. Quando $t \to +\infty$, a concentração do medicamento na corrente sanguínea tende para 0.

3.

3.1. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

3.2. $-\frac{1}{8}$

Teste n.º 6 – Matriz

Tipologia de itens		**Número de itens**	**Cotação por item (em pontos)**
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	10
Itens de construção	Resposta restrita	12	10 a 20

Domínios	**Metas Curriculares**
FRVR11	Definir a noção de derivada. Aplicar a noção de derivada à cinemática de um ponto. Operar com derivadas. Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções. Resolver problemas.
EST11	Determinar os parâmetros da reta de mínimos quadrados. Resolver problemas.

Teste n.º 6

Matemática A

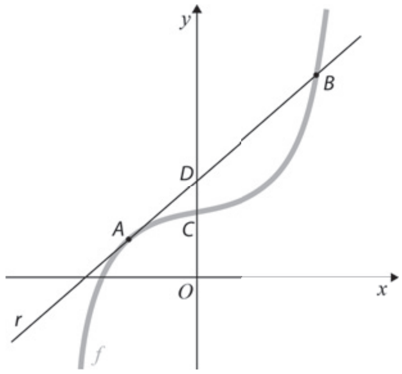
Duração do teste: 90 minutos — Com calculadora

11.º Ano de Escolaridade

GRUPO I

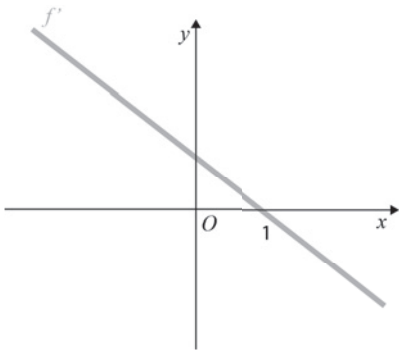
- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, bem como parte da reta *r* que passa pelos pontos *A* e *B* do gráfico, de abcissas *a* e *b*, respetivamente. O gráfico de *f* interseta o eixo Oy no ponto *C*(0, 2) e a reta *r* no ponto *D*, de tal forma que $\overline{OC} = \overline{CD}$. Sabe-se que $\text{t.m.v.}_{[a,b]}(f) = 3$. Qual é a equação reduzida da reta *r*?



(A) $y = \frac{1}{3}x + 2$ **(B)** $y = \frac{1}{3}x + 4$ **(C)** $y = 3x + 2$ **(D)** $y = 3x + 4$

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f '*, derivada de *f*, ambas de domínio $\mathbb{R}$. Qual das expressões seguintes é uma expressão da função *f*?



(A) $f(x) = -x^2 + 3x + 2$

(B) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

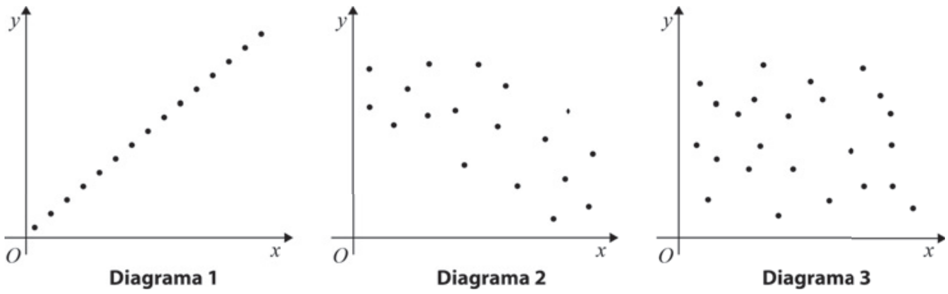
(C) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

(D) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 2$

3. A distância *d*, em metros, percorrida por um corpo em queda livre, no vácuo, é dada, em função do tempo *t*, em segundos, por $d(t) = 5t^2$. Qual é a velocidade do corpo ao fim de 10 segundos?

(A) 500 m/s **(B)** 100 m/s **(C)** 50 m/s **(D)** 10 m/s

4. Considere as nuvens de pontos a seguir apresentadas.



Os coeficientes de correlação linear que mais se adequam a cada diagrama são:

(A) $r_1 = 1$; $r_2 = -0{,}6$; $r_3 = 0$ **(B)** $r_1 = 0$; $r_2 = -0{,}6$; $r_3 = 1$

(C) $r_1 = 1$; $r_2 = 0{,}6$; $r_3 = 0{,}5$ **(D)** $r_1 = -1$; $r_2 = 0{,}6$; $r_3 = 0$

5. De uma dada amostra bivariada $\left(\underset{\sim}{x, y}\right)$, sabe-se que $\bar{x} = 2{,}15$, $\bar{y} = 1{,}99$ e que o declive da reta de mínimos quadrados é 1,41. Qual das equações seguintes pode definir a reta de mínimos quadrados desta amostra?

(A) $y = 1{,}41x + 2{,}15$ **(B)** $y = 1{,}41x + 1{,}99$

(C) $y = 1{,}41x - 1{,}04$ **(D)** $y = 2{,}15x - 1{,}99$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. De uma certa função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $f'(x) = \dfrac{-4x}{x^4 + 2x^2 + 1}$.

1.1. Pode concluir que *f* é contínua em $x = 1$? Justifique a sua resposta.

1.2. Estude a função *f* quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

1.3. Seja *g* uma função tal que $g(2) = 1$ e $g'(2) = -1$. Calcule o valor de $(f \circ g)'(2)$.

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^2 + ax + b$. A reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas (2, 3) é perpendicular à reta de equação $x + 5y = 6$. Determine os valores de a e de b.

3. Na tabela seguinte estão registados dados relativos ao número médio de horas de estudo por dia de um grupo de 10 alunos, para um determinado exame, e a respetiva classificação obtida.

Número de horas de estudo por dia	2	4	6	3	1	6	8	3	2	5
Classificação	14	13	17	14	10	19	19	12	13	17

3.1. Qual é a variável explicativa e a variável resposta?

3.2. Determine a média dos valores de cada uma das variáveis apresentadas.

3.3. Represente os dados num referencial ortogonal e comente a possível existência de correlação linear.

3.4. Determine o valor do coeficiente de correlação linear deste conjunto de dados. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Para resolver este problema, complete a tabela seguinte, onde x é o número de horas de estudo por dia e y é a classificação.

x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
...	...	...	...	...	...	...

3.5. Determine o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

3.6. Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados.

3.7. Utilizando a equação obtida na alínea anterior, determine a classificação esperada para um aluno que tenha estudado, em média, 7 horas por dia.

3.8. Supondo que a classificação de um aluno foi de 16 valores, quantas horas terá esse aluno estudado? Apresente o resultado arredondado às unidades.

- FIM -

Cotações

GRUPO I			**50 pontos**
	Cada resposta certa		10 pontos
	Cada resposta errada		0 pontos
	Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos
GRUPO II			**150 pontos**
	1.		45 pontos
	1.1.	15 pontos	
	1.2.	15 pontos	
	1.3.	15 pontos	
	2.		15 pontos
	3.		90 pontos
	3.1.	10 pontos	
	3.2.	10 pontos	
	3.3.	10 pontos	
	3.4.	20 pontos	
	3.5.	10 pontos	
	3.6.	10 pontos	
	3.7.	10 pontos	
	3.8.	10 pontos	
Total			**200 pontos**

GRUPO I

1. Opção (D).
2. Opção (C).
3. Opção (B).
4. Opção (A).
5. Opção (C).

GRUPO II

1.

1.1. f é contínua em $x = 1$.

1.2. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ e tem um mínimo absoluto em $x = 0$.

1.3. $(f \circ g)'(2) = 1$

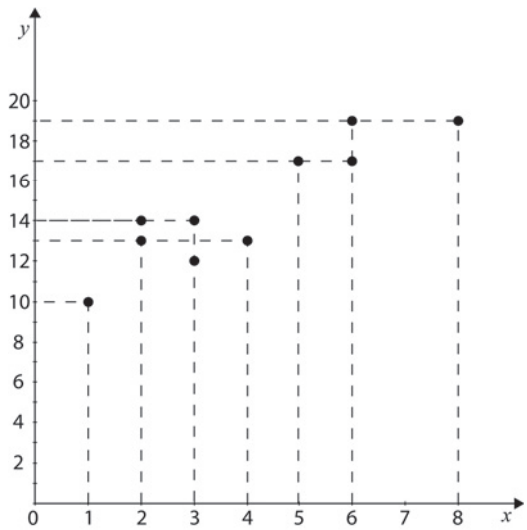
2. $a = -3$ e $b = 1$

3.

3.1. A variável explicativa é o número de horas de estudo por dia. A variável resposta é a classificação obtida.

3.2. $\bar{x} = 4$; $\bar{y} = 14{,}8$

3.3. Correlação linear positiva.



3.4. $r \approx 0{,}91$

3.5. $a \approx 1{,}25$

3.6. $y = 1{,}25x + 9{,}8$

3.7. 18,55 valores.

3.8. 5 horas por dia.

Teste Global – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	10
Itens de construção	Resposta restrita	16	5 a 10

Domínios	Metas Curriculares
TRI11	Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos e resolver triângulos. Definir ângulos orientados e as respetivas medidas de amplitude. Definir rotações segundo ângulos orientados. Definir ângulos generalizados. Definir as razões trigonométricas dos ângulos generalizados. Definir medidas de ângulos em radianos. Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades. Definir funções trigonométricas inversas. Resolver problemas.
GA11	Definir a inclinação de uma reta. Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores. Determinar equações de planos no espaço. Resolver problemas.
SUC11	Caracterizar o conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais. Estudar propriedades elementares das sucessões reais. Utilizar o princípio de indução matemática. Calcular o termo geral de progressões aritméticas e geométricas. Calcular a soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas. Definir o limite de uma sucessão. Resolver problemas.
FRVR11	Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais. Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais. Definir assíntotas ao gráfico de uma função. Resolver problemas. Definir a noção de derivada. Aplicar a noção de derivada à cinemática de um ponto. Operar com derivadas. Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções. Resolver problemas.
EST11	Determinar os parâmetros da reta de mínimos quadrados. Resolver problemas.

Teste Global

Matemática A

Duração do teste: 90 minutos | Com calculadora

11.º Ano de Escolaridade

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. O valor exato de $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)+\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ é:

(A) $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

2. Seja $[ABC]$ um triângulo isósceles tal que $\overline{AC}=\overline{BC}$. Qual é o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0$?

(A) Mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

(B) Circunferência de diâmetro $[AB]$.

(C) Reta tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ no ponto C.

(D) Circunferência de centro em C e raio $[AB]$.

3. Considere a sucessão cujo termo geral é $u_n=-\frac{5n+10}{3n}$.

Qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) Existe um termo da sucessão (u_n) igual a –2.

(B) A sucessão (u_n) é crescente.

(C) A sucessão (u_n) é limitada.

(D) A sucessão (u_n) é divergente.

4. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{se } x > 4 \end{cases}$.

Qual das seguintes funções representa uma extensão contínua da função f de domínio $\mathbb{R}$?

(A) $f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ 3x + 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \\ 2x + 3 & \text{se } x > 4 \end{cases}$

(B) $f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ x + 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \\ 2x + 3 & \text{se } x > 4 \end{cases}$

(C) $f_3(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ 3x - 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \\ 2x + 3 & \text{se } x > 4 \end{cases}$

(D) $f_4(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ x + 4 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \\ 2x + 3 & \text{se } x > 4 \end{cases}$

5. O coeficiente de correlação de uma amostra bivariada é $r = 0{,}22$, sendo $\overline{x} = 4$ e $\overline{y} = 4{,}6$. Qual é a equação da reta de mínimos quadrados que melhor se ajusta a esta amostra?

(A) $y = 0{,}25x + 3{,}6$

(B) $y = 0{,}22x + 4$

(C) $y = 0{,}22x + 4{,}6$

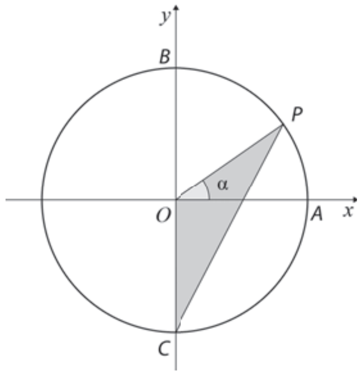
(D) $y = 0{,}25x + 2{,}3$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O.



Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- o ponto A tem coordenadas (1, 0);
- o ponto P desloca-se ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto B;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \frac{\cos x}{2}$.

1.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α, por $f(\alpha)$.

1.2. Supõe que $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Determine a equação reduzida da reta CP.

1.3. Para um certo valor $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se:

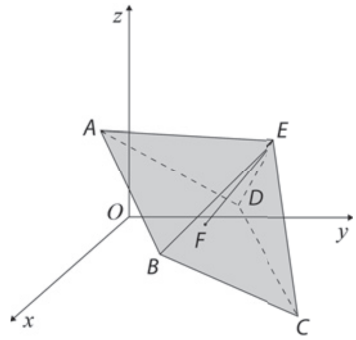
$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(-3\pi + \theta) + \text{tg}(-\pi - \theta) = -\frac{3}{7}$$

Determine $f(\theta)$.

1.4. Mostre que:

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, (1 - \text{sen } x)\left(\frac{1}{\cos x} + \text{tg } x\right) = 2f(x)$$

2. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular [*ABCDE*]. Seja *F* o centro da base da pirâmide.



Sabe-se que:

- o ponto *F* tem coordenadas (–2, 1, –1);
- o vetor $\overrightarrow{EF}$ tem coordenadas (1, –2, –2);
- a reta *EA* é definida pela condição:

$$\begin{cases} x = -3 + k \\ y = 3 - 5k, \ k \in \mathbb{R} \\ z = 1 + k \end{cases}$$

- a reta *ED* é definida pela condição:

$$(x, y, z) = (-6, 1, -2) + k'(1, 1, 1), \ k' \in \mathbb{R}$$

2.1. Escreva uma equação cartesiana do plano *ABC*.

2.2. Escreva uma equação vetorial do plano *ADE*.

2.3. Determine a amplitude, em graus, com aproximação às décimas, do ângulo que o vetor $\vec{r}\,(-1, 1, 2)$ faz com o vetor $\vec{v}\,(1, 0, 0)$.

2.4. Determine as coordenadas do ponto *E*.

3. Uma bola é lançada de uma altura de 15 metros. Cada vez que a bola bate no chão atinge 60% da altura alcançada no salto anterior. Seja (b_n) a altura obtida pela bola na *n*-ésima vez que bate no chão.

3.1. Mostre que $b_n = 15 \times 0{,}6^{n-1}$.

3.2. Determine a soma de todos os termos desta sucessão.

4. Usando o método de indução matemática, prove que:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

5. Sejam $f(x) = \dfrac{2x - 3}{2x^2 + 4}$ e $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ duas funções de domínio $\mathbb{R}$.

5.1. Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

5.2. Estude a função *g* quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

5.3. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'(1)$.

5.4. Determine os valores de x para os quais a reta tangente ao gráfico da função *f* é horizontal.

6. Sejam $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{y}$ duas amostras de dimensão 5, tais que:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 72;\ \sum_{i=1}^{5} y_i = 198;\ \sum_{i=1}^{5} (x_i)^2 = 1122;\ \sum_{i=1}^{5} (y_i)^2 = 8466;\ \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 2819$$

Escreva a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados para estas amostras. Apresente os valores do declive e da ordenada na origem arredondados às centésimas. Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- FIM -

Cotações

GRUPO I		**50 pontos**
Cada resposta certa		10 pontos
Cada resposta errada		0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada		0 pontos
GRUPO II		**150 pontos**
1.		35 pontos
1.1.	5 pontos	
1.2.	10 pontos	
1.3.	10 pontos	
1.4.	10 pontos	
2.		40 pontos
2.1.	10 pontos	
2.2.	10 pontos	
2.3.	10 pontos	
2.4.	10 pontos	
3.		15 pontos
3.1.	5 pontos	
3.2.	10 pontos	
4.		10 pontos
5.		40 pontos
5.1.	10 pontos	
5.2.	10 pontos	
5.3.	10 pontos	
5.4.	10 pontos	
6.		10 pontos
Total		**200 pontos**

GRUPO I

1. Opção (D).
2. Opção (A).
3. Opção (D).
4. Opção (C).
5. Opção (A).

GRUPO II

1.

1.1. Ao cuidado do aluno.

1.2. $y = \sqrt{3}x - 1$

1.3. $\frac{7\sqrt{58}}{116}$

1.4. Ao cuidado do aluno.

2.

2.1. $x - 2y - 2z + 2 = 0$

2.2. $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + r(1, -5, 1) + s(1, 1, 1), r, s \in \mathbb{R}$

2.3. 54,74°

2.4. $\left(-\frac{19}{6}, \frac{23}{6}, \frac{5}{6}\right)$

3.

3.1. Ao cuidado do aluno.

3.2. 37,5

4. Ao cuidado do aluno.

5.

5.1. $y = 0$

5.2. A função g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ e tem um mínimo em $x = 0$.

5.3. $\frac{8}{9}$

5.4. $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$

6. $y = -0{,}38x + 45{,}04$

07.

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

TESTES

Materiais disponíveis em formato fotocopiável e projetável em 20 AULA DIGITAL PROFESSOR

Teste de Diagnóstico

1.

1.1. O termo com 8 círculos brancos é o sétimo termo. O termo geral da sequência do número de círculos cinzentos é $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Assim, $a_7 = \frac{7 \times 8}{2} = 28$.

Logo, o termo com 8 círculos brancos tem 28 círculos cinzentos.

1.2. Suponha-se que o termo geral da sequência do número total de círculos é $u_n = 2n + 1$.
Tem-se então $u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ e $u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$. Logo, a opção (A) está errada, uma vez que o 2.º termo tem 6 círculos e não 5.

Suponha-se agora que o termo geral da sequência do número total de círculos é $u_n = \frac{n+5}{2}$. Tem-se então $u_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ e $u_2 = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$. Logo, a opção (B) está errada, uma vez que o 2.º termo tem 6 círculos e não $\frac{7}{2}$.

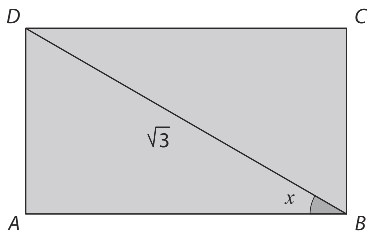
Suponha-se agora o termo geral da sequência do número total de círculos é $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Tem-se então $u_1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$. Logo, a opção (C) está errada, uma vez que o 1.º termo tem 3 círculos e não 1.

Assim, a opção correta é a (D). Suponha-se então que $u_n = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$.

Tem-se então $u_1 = \frac{2 \times 3}{2} = 3$, $u_2 = \frac{3 \times 4}{2} = 6$, $u_3 = \frac{4 \times 5}{2} = 10$, e assim sucessivamente.

2. Considere-se o esboço apresentado na figura abaixo.



$$\text{sen}\, x = \frac{\overline{AD}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \sqrt{3}\,\text{sen}\, x$$

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{3}\cos x$$

Logo, $A_{[ABCD]} = \overline{AD} \times \overline{AB} = \sqrt{3}\,\text{sen}\, x \times \sqrt{3}\cos x =$
$= 3\,\text{sen}\, x \cos x$, como se queria demonstrar.

3. $\text{sen}\, \alpha = \frac{1}{3}$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2\, \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Uma vez que α é um ângulo agudo, tem-se que $\cos \alpha$ é positivo, ou seja, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo, a opção correta é a (B).

4. $\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt{a^3 b}\,\sqrt[4]{b}}{a^2\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\, a^{\frac{3}{2}}\, b^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{4}}}{a^2\, b^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = \left(\frac{a^{\frac{13}{6}}\, b^{\frac{3}{4}}}{a^2\, b^{\frac{1}{2}}}\right)^2 =$

$= \left(a^{\frac{1}{6}}\, b^{\frac{1}{4}}\right)^2 = a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a}\,\sqrt{b}$

Logo, a opção correta é a (A).

5.

5.1. A é o centro da circunferência definida por $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$, logo $A(2, 3)$.
B é um dos pontos de interseção da circunferência com a reta de equação $y = x + 1$. Substituindo na equação da circunferência y por $x + 1$, obtém-se:

$(x-2)^2 + (x+1-3)^2 = 4$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-2)^2 = 4$
$\Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 4$
$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{2} \lor x - 2 = -\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \lor x = 2 - \sqrt{2}$

Uma vez que o outro ponto de interseção da circunferência com a reta de equação $y = x + 1$ é o ponto D e que a abcissa de B é menor que a abcissa de D, tem-se que $B(2 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$.
E é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Oy, pelo que, substituindo x por 0 na equação da circunferência, obtém-se:

$(0-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \Leftrightarrow 4 + (y-3)^2 = 4$
$\Leftrightarrow (y-3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow y - 3 = 0$
$\Leftrightarrow y = 3$

Logo, $E(0, 3)$.
Uma vez que o raio da circunferência é 2, tem-se que $F = E + (2, 2) = (2, 5)$.

5.2. $E(0, 3)$ e $F(2, 5)$
$\overline{EF} = \sqrt{(0-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} =$
$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

5.3. Uma vez que a reta EF é paralela à reta de equação $y = x + 1$, um seu vetor diretor é o vetor de coordenadas $(1, 1)$. Assim, uma equação vetorial da reta EF é:
EF: $(x, y) = (0, 3) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$

5.4. $(x-0)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-5)^2$
$\Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9=x^2-4x+4+y^2-10y+25$
$\Leftrightarrow 4y=-4x+20$
$\Leftrightarrow y=-x+5$
Assim, $y=-x+5$ é a equação reduzida da mediatriz de $[EF]$.

5.5. $\overrightarrow{EF}=F-E=(2,5)-(0,3)=(2,2)$
Como o vetor $\vec{u}$ é colinear com $\overrightarrow{EF}$, tem-se que $\vec{u}(2k,2k), k\in\mathbb{R}$.
$\|\vec{u}\|=\sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2+(2k)^2}=\sqrt{12}$
$\Leftrightarrow 4k^2+4k^2=12 \Leftrightarrow k^2=\frac{12}{8} \Leftrightarrow k^2=\frac{3}{2}$
Uma vez que o vetor $\vec{u}$ tem o mesmo sentido do vetor $\overrightarrow{EF}$, então $k>0$, logo $k=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.
Logo, $\vec{u}=(\sqrt{6},\sqrt{6})$.

6. $\sim((x<3 \vee x\geq 5) \wedge y\leq 2)$
$\Leftrightarrow \sim(x<3 \vee x\geq 5) \vee \sim(y\leq 2)$
$\Leftrightarrow (\sim(x<3) \wedge \sim(x\geq 5)) \vee y>2$
$\Leftrightarrow (x\geq 3 \wedge x<5) \vee y>2$
Logo, a opção correta é a (C).

7.

7.1. $A_{[ABC]}=\frac{A_{[ABCO]}}{2}=\frac{36}{2}=18$
$V_{[ABCE]}=\frac{1}{3}\times A_{[ABC]}\times 8=\frac{1}{3}\times 18\times 8=48$
Logo, o volume da pirâmide $[ABCE]$ é 48 cm^3.

7.2. Uma vez que $A_{[ABCO]}=36$, então $\overline{AB}=\overline{OA}=6$.
Assim, $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,6,0)$ e $E(6,6,8)$.

7.3.

7.3.1. $y=6$

7.3.2. $x=6 \wedge z=8$

7.3.3. $0\leq x\leq 6 \wedge y=6 \wedge z=0$

7.4.

7.4.1. $A+\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{E}$

7.4.2. $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{\boldsymbol{OE}}$

7.4.3. $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{\boldsymbol{ED}}=\overrightarrow{AD}$

7.4.4. $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}\|=\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\|=\|\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}\|$
$\|\overrightarrow{AE}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{BE}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AE}\|^2=6^2+8^2$
$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AE}\|^2=100$
Logo, $\|\overrightarrow{AE}\|=\sqrt{100}=10$.

7.5. $H=B+\frac{1}{4}\overrightarrow{CF}=(6,6,0)+\frac{1}{4}(0,0,8)=(6,6,2)$
Seja M o ponto médio de $[DH]$.
$M=\left(\frac{6+6}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{8+2}{2}\right)=(6,3,5)$
$\|\overrightarrow{HM}\|=\sqrt{(6-6)^2+(6-3)^2+(2-5)^2}=$
$=\sqrt{0+9+9}=\sqrt{18}$
Logo, uma condição que define a esfera da qual os pontos D e H são as extremidades do seu diâmetro é $(x-6)^2+(y-3)^2+(z-5)^2\leq 18$.

8.

8.1. Abcissa do vértice da parábola: $\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$
Uma expressão analítica da função f é do tipo $f(x)=a(x+1)(x-2)$, onde $a\in\mathbb{R}^+$.
Tem-se que $f(0)=-2 \Leftrightarrow a(0+1)(0-2)=-2$
$\Leftrightarrow a=1$.
Logo, $f(x)=(x+1)(x-2)$.
Assim, a ordenada do vértice é:
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)=-\frac{9}{4}$
Então, $D'_f=\left[-\frac{9}{4},+\infty\right[$.

8.2.

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	–	–	–	0	+
$g(x)$	–	–	–	0	+	+	+
$f(x)\times g(x)$	–	0	+	0	–	0	+

$f(x)\times g(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-\frac{1}{2},2\right[$

8.3. $f^{-1}(-2)+g\circ f(2)=0+g(0)=0+1=1$

8.4. O gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f através de uma translação associada ao vetor $(1,0)$, seguida de uma reflexão em relação ao eixo Ox dos pontos de ordenada negativa e de uma translação segundo o vetor $(0,-1)$. Logo, a opção correta é a (D).

9. $x^3+2x=2x^2+x \Leftrightarrow x^3-2x^2+x=0$
$\Leftrightarrow x(x^2-2x+1)=0$
$\Leftrightarrow x=0 \vee (x-1)^2=0$
$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1$
A equação dada é possível em $\mathbb{R}$ e o seu conjunto-solução é $\{0,1\}$.
Logo, a opção correta é a (C).

10.

10.1. $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}=\frac{3+2+4+1+7}{5}=3{,}4$

10.2. $SS_x=\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=$
$=(3-3{,}4)^2+(2-3{,}4)^2+(4-3{,}4)^2+(1-3{,}4)^2+$
$+(7-3{,}4)^2=$
$=0{,}16+1{,}96+0{,}36+5{,}76+12{,}96=$
$=21{,}2$

10.3. $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{5-1}} = \sqrt{\frac{21,2}{4}} \approx 2,3$

11. Ordenando os dados, vem:

147,6	234,5	308,1
160,3	240,6	327,9
178,4	241,3	352,3
179,6	252,8	456,0
210,1	307,7	497,3

$Me = x_{\left(\frac{15+1}{2}\right)} = x_{(8)} = 241,3$

Teste n.º 1

GRUPO I

1. Recorrendo à Lei dos Senos, tem-se que:

$\frac{\text{sen } \alpha}{6} = \frac{\text{sen } 45^o}{5}$

Assim:

$\frac{\text{sen } \alpha}{6} = \frac{\text{sen } 45^o}{5} \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = \frac{6 \text{ sen } 45^o}{5}$

$\Leftrightarrow \text{ sen } \alpha = \frac{6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{5} \Leftrightarrow \text{ sen } \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

Logo, a opção correta é a (C).

2. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

Tem-se que $\overline{OM} = \text{sen } \alpha$ e $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{OC} = \cos \alpha$.

Assim:

$A_{[ABCO]} = \frac{(2 \cos \alpha + \cos \alpha) \times \text{sen } \alpha}{2} =$

$= \frac{3 \cos \alpha \text{ sen } \alpha}{2} =$

$= \frac{3}{2} \text{ sen } \alpha \cos \alpha$

Logo, a opção correta é a (A).

3. A opção (A) é falsa, uma vez que se $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tem-se $\text{sen } x > 0$ e $\cos x < 0$, ou seja, neste intervalo, há valores de x para os quais se tem $\text{sen } x \times \cos x < 0$.

A opção (B) é verdadeira, uma vez que se $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ tem-se $\text{sen } x < 0$ e $\cos x > 0$, ou seja, neste intervalo, há valores de x para os quais se tem $\text{sen } x \times \cos x < 0$.

A opção (C) é falsa, uma vez que se $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tem-se $\text{sen } x > 0$ e $\cos x < 0$, ou seja, neste intervalo, há valores de x para os quais se tem $\frac{\text{sen } x}{\cos x} < 0$.

A opção (D) é falsa, uma vez que se $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tem-se $\text{sen } x > 0$ e $\cos x > 0$, ou seja, neste intervalo, para qualquer valor de x, tem-se $\frac{\text{sen } x}{\cos x} > 0$.

4. $\frac{11\pi}{18} - \left(-\frac{\pi}{18}\right) = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$, que é o período positivo mínimo da função f.

Logo, a opção correta é a (D).

5. Sabe-se que $\cos \theta = -\frac{1}{5}$.

$\text{sen } (\theta + \pi) = -\text{sen } \theta$ e $-\text{sen } \theta \neq \frac{1}{5}$ porque $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \neq 1$, o que exclui a opção (A).

$\text{sen } (\theta - \pi) = -\text{sen } \theta$ e $-\text{sen } \theta \neq \frac{1}{5}$ porque $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \neq 1$, o que exclui a opção (B).

$\text{sen } \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$ e $\cos \theta \neq \frac{1}{5}$, o que exclui a opção (C).

$\text{sen } \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta = -\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$, pelo que a opção (D) é a correta.

GRUPO II

1.

1.1. $-1 \leq \text{sen } \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$

$\Leftrightarrow -3 \leq 3 \text{ sen } \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3$

$\Leftrightarrow 3 \geq -3 \text{ sen } \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \geq -3$

$\Leftrightarrow 8 \geq 5 - 3 \text{ sen } \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 2$

Ou seja, $D'_f = [2, 8]$.

1.2. $f(x) = 8 \Leftrightarrow 5 - 3 \text{ sen } \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 8$

$\Leftrightarrow \text{ sen } \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

1.3. $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= 5 - 3 \text{ sen } \left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right) + 5 -$

$- 3 \text{ sen}\left(3\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right) =$

$= 10 - 3\text{sen}\left(3x - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - 3 \text{ sen}\left(3x + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) =$

$= 10 - 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) =$

$= 10$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

2.

2.1. $g(0) = 3 + \arccos(1) = 3 + 0 = 3$

$g\left(-\frac{1}{4}\right) = 3 + \arccos\left(2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 1\right) =$

$= 3 + \arccos\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 3 + \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + \frac{\pi}{3}$

2.2. $g(x) = 3 + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 3 + \arccos(2x + 1) = 3 + \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \arccos(2x+1) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$

3.

3.1. $A_{[AEF]} = A_{[ABCD]} - A_{[ABE]} - A_{[AFD]} - A_{[ECF]}$

$A_{[ABCD]} = 1 \times 1 = 1$

$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BE}}{1} \Leftrightarrow \overline{BE} = \operatorname{tg} x$

Nas condições do enunciado, tem-se que $\overline{BE} = \overline{DF}$, logo $\overline{DF} = \operatorname{tg} x$. Além disso, $\overline{EC} = \overline{CF} = 1 - \operatorname{tg} x$. Logo:

$A_{[ABE]} = A_{[AFD]} = \frac{1 \times \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$ e

$A_{[ECF]} = \frac{(1 - \operatorname{tg} x) \times (1 - \operatorname{tg} x)}{2} = \frac{1 - 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{2}$

Assim:

$A_{[AEF]} = 1 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} - \frac{\operatorname{tg} x}{2} - \frac{1 - 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{2} =$

$= 1 - \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} + \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\cos^2 x} =$

$= \frac{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)}{2\cos^2 x} =$

$= \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x} =$

$= 1 - \frac{1}{2\cos^2 x}$, como se pretendia demonstrar.

3.2. $A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Uma vez que $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, tem-se que $x = 0$.

3.3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{4}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{13}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{9}{13}$

Logo, $A(x) = 1 - \frac{1}{2 \times \frac{9}{13}} = \frac{5}{18}$

4. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 6^2 + 10^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 136$

Logo, $\overline{BD} = \sqrt{136}$.

Recorrendo à Lei dos Cossenos:

$\sqrt{136}^2 = 10^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times 10 \times \overline{BC} \times \cos 60^{\text{o}}$

$\Leftrightarrow 136 = 100 + \overline{BC}^2 - 10\,\overline{BC}$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 - 10\,\overline{BC} - 36 = 0$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4 \times 36}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{10 \pm 2\sqrt{61}}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 5 \pm \sqrt{61}$

Logo, $\overline{BC} = 5 + \sqrt{61}$.

Assim, o perímetro do quadrilátero $[ABCD]$ é:

$10 + 6 + 10 + 5 + \sqrt{61} = 31 + \sqrt{61}$ m

Teste n.º 2

GRUPO I

1. $\frac{180^{\text{o}}}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^{\text{o}}}{1 \text{ rad}} \Leftrightarrow x = \frac{180}{\pi}$

Assim, $x \approx 57^{\text{o}}$.

Logo, a opção correta é a (D).

2. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: 3 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cálculo auxiliar
$3 - \operatorname{tg}^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 3$
$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \vee \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Então, $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \wedge x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi \wedge \right.$

$\left. \wedge\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Assim, $\frac{\pi}{4} \in D_f$.

Logo, a opção correta é a (A).

3. $m_r = \operatorname{tg}(150^{\text{o}}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, a equação reduzida da reta r é da forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Logo, a opção correta é a (D).

4. $\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} =$

$= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BA}\| \times \cos 180^{\text{o}} =$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times (-1) =$

$= -2$

Logo, a opção correta é a (B).

5. $\vec{r}(a, -3, b)$, $\vec{u}(2, 1, 1)$, $\vec{v}(1, 1, -1)$

$$\begin{cases} (a, -3, b) \cdot (2, 1, 1) = 0 \\ (a, -3, b) \cdot (1, 1, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3 + b = 0 \\ a - 3 - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 2a \\ a - 3 - 3 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 3a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Logo, a opção correta é a (C).

GRUPO II

1. Pela Lei dos Senos:

$$\frac{\text{sen } 60^{\text{o}}}{a} = \frac{\text{sen } 45^{\text{o}}}{b} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{b} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}b}{2}$$

Mas $b - a = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = a + \sqrt{3}$. Logo:

$$a = \frac{\sqrt{3}(a + \sqrt{3})}{2} \Leftrightarrow 2a = \sqrt{3}a + 3$$

$$\Leftrightarrow a(2 - \sqrt{3}) = 3$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3\sqrt{3} + 6}{4 - 3}$$

$$\Leftrightarrow a = 3\sqrt{3} + 6$$

2.

2.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \text{sen } x \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\,(1 + \text{sen } x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \text{sen } x = -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Uma vez que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, então f não tem zeros.

2.2. $\text{tg } (\pi - \alpha) = -2 \Leftrightarrow -\text{tg } \alpha = -2 \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = 2$

$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$

Como $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \frac{1}{5} = 1$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{4}{5}$

Como $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\text{sen } x = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Logo:

$f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

$= -\text{sen } \alpha + \cos \alpha\,(-\text{sen } \alpha) =$

$= -\text{sen } \alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha =$

$= -\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} =$

$= -\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5} =$

$= -\frac{2 + 2\sqrt{5}}{5}$

2.3. $\overline{AB} = 2 \cos \beta$

Altura $= 1 + \text{sen } \beta$

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$\frac{2 \cos \beta \times (1 + \text{sen } \beta)}{2} = \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \beta = f(\beta)$

2.4. $\frac{\cos^3 x}{1 - \text{sen } x} = \frac{\cos^2 x}{1 - \text{sen } x} \times \cos x =$

$= \frac{1 - \text{sen}^2\,x}{1 - \text{sen } x} \times \cos x =$

$= \frac{(1 - \text{sen } x)\,(1 + \text{sen } x)}{1 - \text{sen } x} \times \cos x =$

$= (1 + \text{sen } x) \cos x =$

$= \cos x + \text{sen } x \cos x =$

$= f(x)$

3. $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u} + \vec{v}\| \times \cos(\widehat{u, u+v}) =$

$= 2 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

Por outro lado, $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} =$
$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Então, $4 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2} - 4$.

4.

4.1. $F\left(\frac{5}{2}, 5, 5\right)$; $\overrightarrow{OF}\left(\frac{5}{2}, 5, 5\right)$; $S\left(\frac{5}{2}, 5, z\right)$; $\overrightarrow{OS}\left(\frac{5}{2}, 5, z\right)$

Assim:

$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OS} = 50 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}, 5, 5\right) \cdot \left(\frac{5}{2}, 5, z\right) = 50$

$\Leftrightarrow \frac{25}{4} + 25 + 5z = 50$

$\Leftrightarrow 5z = \frac{75}{4}$

$\Leftrightarrow z = \frac{15}{4}$

4.2. $P\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right)$; $Q\,(0, 5, 0)$; $R\left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right)$

$\overrightarrow{QP} = P - Q = \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) - (0, 5, 0) = \left(\frac{5}{2}, -3, 0\right)$

$\overrightarrow{QR} = R - Q = \left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right) - (0, 5, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right)$

$\|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} =$

$= \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$\|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} =$

$= \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \left(\frac{5}{2}, -3, 0\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right) =$

$= -\frac{25}{4} + 0 + 0 = -\frac{25}{4}$

Então:
$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \|\overrightarrow{QP}\| \times \|\overrightarrow{QR}\| \times \cos(P\hat{Q}R)$

$\Leftrightarrow -\frac{25}{4} = \frac{\sqrt{61}}{2} \times \frac{\sqrt{61}}{2} \times \cos(P\hat{Q}R)$

$\Leftrightarrow \cos(P\hat{Q}R) = -\frac{25}{61}$

Logo, $P\hat{Q}R = \cos^{-1}\left(-\frac{25}{61}\right) \approx 114{,}2^{\text{o}}$.

4.3. $G\left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right)$; $B\left(\frac{5}{2}, 5, 0\right)$; $H\left(-\frac{5}{2}, 0, 5\right)$

$\overrightarrow{BH} = H - B = \left(-\frac{5}{2}, 0, 5\right) - \left(\frac{5}{2}, 5, 0\right) = (-5, -5, 5)$

Logo, a equação pretendida é da forma
$-5x - 5y + 5z + d = 0$.
Uma vez que G pertence ao plano:

$-5 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 5 \times 5 + 5 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{25}{2}$

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa no vértice G e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{BH}$ é:

$-5x - 5y + 5z - \frac{25}{2} = 0 \Leftrightarrow 10x + 10y - 10z + 25 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z + 5 = 0$

4.4. $P\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right)$; $Q\,(0, 5, 0)$; $R\left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right)$

$\overrightarrow{QP} = P - Q = \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) - (0, 5, 0) = \left(\frac{5}{2}, -3, 0\right)$

$\overrightarrow{QR} = R - Q = \left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right) - (0, 5, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right)$

Logo, PQR: $(x, y, z) =$

$= \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) + s\left(\frac{5}{2}, -3, 0\right) + t\left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right)$, $s, t \in \mathbb{R}$

4.5. $A\left(\frac{5}{2}, 0, 0\right)$; $G\left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right)$

$\overrightarrow{AG} = G - A = \left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right) - \left(\frac{5}{2}, 0, 0\right) = (-5, 5, 5)$

Assim, um sistema de equações paramétricas que define a reta AG é:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} - 5k \\ y = 5k, \ k \in \mathbb{R} \\ z = 5k \end{cases}$$

Teste n.º 3

GRUPO I

1. r: $x - 2y = 3 \Leftrightarrow -2y = -x + 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

O declive da reta r é $\frac{1}{2}$, logo o declive da reta s, perpendicular a r, é -2. Um vetor diretor da reta s pode ser então $(1, -2)$.
Logo, a opção correta é a (D).

2. $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}})$ é um ângulo agudo, pelo que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$.
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ é um ângulo obtuso, pelo que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} < 0$.
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}})$ é um ângulo obtuso, pelo que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} < 0$.
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EA}})$ é um ângulo agudo, pelo que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} > 0$.
Logo, a opção correta é a (B).

3. O ponto $(1, 0, 1)$ não pertence à reta r porque:

$$\begin{cases} 1 = 1 - k \\ 0 = 2 + 0k \\ 1 = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 0 = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$ é um sistema impossível.

O ponto $(1, 2, 2)$ pertence ao plano α porque:

$$\begin{cases} 1 = 1 + s - t \\ 2 = -1 + 2s + t \\ 2 = 1 - s + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = t \\ 3 = 2s + s \\ 1 = -s + 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 1 \\ s = 1 \end{cases}$$

O vetor $(1, 2, -1)$ não é normal ao plano α, uma vez que é um vetor paralelo a esse plano. A reta r não é perpendicular ao plano α, uma vez que o seu vetor diretor $(-1, 1, 2)$ é um vetor paralelo a esse plano.
Logo, a opção correta é a (B).

4. $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1) - 1}{2(n+1) + 1} - \frac{2n - 1}{2n + 1} =$

$= \frac{2n + 1}{2n + 3} - \frac{2n - 1}{2n + 1} =$

$= \frac{(2n + 1)^2 - (2n - 1)(2n + 3)}{(2n + 3)(2n + 1)} =$

$= \frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n + 3}{(2n + 3)(2n + 1)} =$

$= \frac{4}{(2n + 3)(2n + 1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

Assim, o primeiro termo da sucessão, $u_1 = \frac{1}{3}$, é o maior dos minorantes.

$$\lim \frac{2n-1}{2n+1} = \lim \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 1$$

Logo, 1 é o menor dos majorantes da sucessão.

Assim, o conjunto dos minorantes de (u_n) é $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e o conjunto dos seus majorantes é $[1, +\infty[$.

Logo, a opção correta é a (A).

5. A afirmação (I) é falsa, porque, por exemplo, a sucessão definida por $\left(-\frac{1}{n}\right)^n$ é um infinitésimo, mas não é uma sucessão monótona.

A afirmação (II) é verdadeira, já que um infinitésimo é uma sucessão que converge para 0.

A afirmação (III) é verdadeira, uma vez que toda a sucessão convergente é limitada.

Logo, a opção correta é a (C).

GRUPO II

1.

1.1. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 8 + 1 + 4$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$

Logo, $C(-1, 2)$.

$\overrightarrow{CB} = (-4, 4) - (-1, 2) = (-3, 2)$

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

$\Leftrightarrow (-3, 2) \cdot (x + 4, y - 4) = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 12 + 2y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 2y = 3x + 20$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 10$, que é a equação reduzida da reta s.

1.2. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = (-3, 2)$ é um vetor diretor da reta r.

Logo, o declive da reta r é $m = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$.

A inclinação da reta r é o valor α tal que:

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3} \wedge 0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$, ou seja, $\alpha \approx 146{,}3^{\circ}$.

1.3. Como o declive da reta r é $m = -\frac{2}{3}$, a sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$. Como o ponto D pertence à reta r, então:

$5 = -\frac{2}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{3}$

Logo, r: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$.

O ponto A é a interseção das retas r e s:

$\frac{3}{2}x + 10 = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$

$\Leftrightarrow 9x + 60 = -4x + 34$

$\Leftrightarrow 13x = -26$

$\Leftrightarrow x = -2$

Então, $y = \frac{3}{2} \times (-2) + 10 = 7$. Logo, $A(-2, 7)$.

F é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox, logo $-\frac{2}{3}x + \frac{17}{3} = 0 \Leftrightarrow 2x = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{2}$

Então, $F\left(\frac{17}{2}, 0\right)$.

E é o ponto de interseção da reta s com o eixo Ox, logo $\frac{3}{2}x + 10 = 0 \Leftrightarrow 3x = -20 \Leftrightarrow x = -\frac{20}{3}$

Então, $E\left(-\frac{20}{3}, 0\right)$.

Assim, $\overline{EF} = \frac{17}{2} + \frac{20}{3} = \frac{91}{6}$.

Logo, a área do triângulo $[AEF]$ é dada por:

$$\frac{\frac{91}{6} \times 7}{2} \approx 53{,}08 \text{ u.a.}$$

2.

2.1. Um vetor normal ao plano α é $\vec{a}(1, 2, -1)$. Este vetor é também normal ao plano β, uma vez que os planos são paralelos.

Como o ponto A pertence ao plano β, então:

$1(x-1) + 2(y-3) - 1(z+2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 + 2y - 6 - z - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - z - 9 = 0$, que é uma equação cartesiana do plano β.

2.2. O ponto A é exterior à reta r:

$(1, 3, -2) = (1, -1, 1) + k(-1, 1, 2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 - k \\ 3 = -1 + k \\ -2 = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 3 = -1 \\ -2 = 1 \end{cases}$ é um sistema impossível. Logo, o ponto A não pertence à reta r.

Um ponto da reta r é $B(1, -1, 1)$.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-1, 1, 2)$.

Assim, uma equação vetorial do plano γ é $(x, y, z) = (1, 3, -2) + s(0, -4, 3) + t(-1, 1, 2)$, $s, t, \in \mathbb{R}$

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{r}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, -4, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 1, 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4b + 3c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{4}c \\ -a + \frac{3}{4}c + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{4}c \\ a = \frac{11}{4}c \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(\frac{11}{4}c, \frac{3}{4}c, c\right)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se $c = 4$, por exemplo, obtém-se $\vec{u}(11, 3, 4)$.

Então, $\vec{u}(11, 3, 4)$ é um vetor normal ao plano γ e $A(1, 3, -2)$ é um ponto do plano:

$11(x - 1) + 3(y - 3) + 4(z + 2) = 0$

$\Leftrightarrow 11x - 11 + 3y - 9 + 4z + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 11x + 3y + 4z - 12 = 0$, que é uma equação cartesiana do plano γ.

2.3. $\|\vec{r}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\|\vec{v}\| = 1$

$\vec{r} \cdot \vec{v} = -1$

Seja θ a amplitude do ângulo que a reta r faz com o vetor $\vec{v}$.

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{6} \times 1} = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

Logo, $\theta \approx 114{,}1°$.

3.

3.1. $u_{n+1} - u_n = u_n + 2 - u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

3.2. Uma vez que $u_{n+1} - u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$, então a sucessão é uma progressão aritmética de diferença 2.

$u_n = 4 + 2(n - 1) = 4 + 2n - 2 = 2n + 2$

3.3. A sucessão (u_n) é uma sucessão monótona crescente, logo $u_1 = 2$ é um minorante da sucessão.

A sucessão (u_n) não tem majorantes, uma vez que $\lim u_n = \lim (2n + 1) = +\infty$.

Logo, a sucessão (u_n) não é limitada.

3.4. $\sum_{k=5}^{20} u_k = S_{20} - S_4 =$

$= \frac{4 + (2 \times 20 + 2)}{2} \times 20 - \frac{4 + (2 \times 4 + 2)}{2} \times 4 =$

$= 460 - 28 = 432$

4.

4.1. $a_n = \frac{1}{4}a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica e a sua razão é $\frac{1}{4}$.

$a_1 = 2 \times 2 = 4$

$a_n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4 \times 4^{1-n} = 4^{2-n}$

4.2. $S_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} =$

$= \frac{16}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$, como queríamos demonstrar.

$\lim S_n = \lim \frac{16}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{16}{3}(1 - 0) = \frac{16}{3}$

A sucessão (S_n) é convergente.

5. Se $n = 1$:

$4 \times 1 - 3 = \frac{1}{2} \times 1 \times (4 \times 1 - 2)$

$\Leftrightarrow 4 - 3 = \frac{1}{2} \times 2$

$\Leftrightarrow 1 = 1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $1 + 5 + 9 + 13 + ... + (4n - 3) = \frac{1}{2}n(4n - 2)$

Tese: $1 + 5 + 9 + 13 + ... + (4n - 3) + (4n + 1)$

$= \frac{1}{2}(n + 1)(4n + 2)$

Demonstração:

$1 + 5 + 9 + 13 + ... + (4n - 3) + (4n + 1) =$

$= \frac{1}{2}n(4n - 2) + (4n + 1) =$

$= \frac{4n^2 - 2n}{2} + 4n + 1 =$

$= 2n^2 + 3n + 1 =$

$= 2(n + 1)\left(n + \frac{1}{2}\right) =$

$= (n + 1)(2n + 1) =$

$= \frac{1}{2}(n + 1)(4n + 2)$

Logo, $1 + 5 + 9 + 13 + ... + (4n - 3) = \frac{1}{2}n(4n - 2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teste n.º 4

GRUPO I

1. Uma vez que $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{3}$ e $a_3 = -\frac{1}{4}$, a sucessão (a_n) não é monótona.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{-1}{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Se n é par: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} < 0$ e $\lim a_n = 0$.

Logo, $a_2 = \frac{1}{3}$ é o maior dos termos de ordem par e é um majorante desta subsucessão.

Se n é ímpar: $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} > 0$ e $\lim a_n = 0$.

Logo, $a_1 = -\frac{1}{2}$ é o maior dos termos de ordem ímpar e é um minorante desta subsucessão.

Como $-\frac{1}{2} \leq a_n < \frac{1}{3}$, então a sucessão (a_n) é limitada.

Logo, a opção correta é a (A).

2. Sendo (b_n) uma progressão geométrica de razão 3, então:

$$b_5 = b_3 \times 3^2 \Leftrightarrow 8x + 1 = (x-1) \times 9$$
$$\Leftrightarrow 8x + 1 = 9x - 9$$
$$\Leftrightarrow x = 10$$

Assim, $b_4 = b_3 \times 3 = (10 - 1) \times 3 = 27$.

Logo, a opção correta é a (C).

3. $\lim u_n = \lim \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$

$\lim v_n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\lim w_n = \lim \frac{n^2}{n+2} = \lim \frac{n}{1 + \frac{2}{n}} = +\infty$

Assim, são infinitésimos as sucessões (u_n) e (v_n).

Logo, a opção correta é a (A).

4. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(2)}{0^+} = -\infty$, uma vez que $f(2) < 0$.

Logo, a opção correta é a (C).

5. $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$

Assim, a reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2$

Assim, a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g.

Logo, a opção correta é a (A).

GRUPO II

1.

1.1. Se n é ímpar: $\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$.

Então, uma vez que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, tem-se $2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$.

Se n é par: $\frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$.

Então, uma vez que $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, tem-se

$0 > -\frac{2}{n+1} \geq -2 \Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{2}{n+1} \geq 0$.

Logo, $0 \leq a_n \leq 2$, ou seja, (a_n) é uma sucessão limitada.

1.2.

1.2.1. $a_1 = 3$ $\quad a_2 = \frac{4}{3}$

Logo, $a_2 - a_1 < 0$, o que significa que a proposição é falsa.

1.2.2. Se existir um valor de n ímpar nas condições do enunciado, então:

$$\frac{2n+1}{n} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow 18n + 9 = 16n$$
$$\Leftrightarrow 2n = -9$$
$$\Leftrightarrow n = -\frac{9}{2}$$, o que é impossível já que n é um número natural.

Se existir um valor de n par nas condições do enunciado, então:

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow 18n = 16n + 16$$
$$\Leftrightarrow 2n = 16$$
$$\Leftrightarrow n = 8$$, que é um número natural e par.

Logo, a proposição é verdadeira.

1.3. Se n é ímpar:

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

Se n é par:

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} = 2$

Logo, a sucessão (a_n) é convergente para 2.

2.

2.1. $u_3 = 12$

$$u_{10} = 47 \Leftrightarrow u_3 + (10-3)d = 47$$
$$\Leftrightarrow 12 + 7d = 47$$
$$\Leftrightarrow 7d = 35$$
$$\Leftrightarrow d = 5$$

Logo, $u_n = u_3 + (n-3)d = 12 + (n-3) \times 5 =$
$= 12 + 5n - 15 = 5n - 3$.

2.2. $u_1 = 5 \times 1 - 3 = 2$

$$S_n = 555 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 555$$
$$\Leftrightarrow \frac{2 + 5n - 3}{2} \times n = 555$$
$$\Leftrightarrow (5n - 1)n = 1110$$
$$\Leftrightarrow 5n^2 - n - 1110 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 22\,200}}{10}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 149}{10}$$
$$\Leftrightarrow n = 15 \vee n = -74$$

Logo, é necessário somar os 15 primeiros termos da sucessão.

3.

3.1. Se $n = 1$:

$\frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.

Para $n > 1$:

Hipótese: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

Tese: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$

Demonstração:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n - 1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$\frac{(2^n - 1) \times 2 + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 2 + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$$

Logo, $v_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$, como queríamos demonstrar.

3.2. $\lim v_n = \lim \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1$

4.

4.1. $x = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow 3x + 4 = 0$

Logo, $f(x) = \frac{ax + b}{3x + 4}$.

Como $y = \frac{2}{3}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f, então $\frac{a}{3} = \frac{2}{3}$, logo $a = 2$.

Então, $f(x) = \frac{2x + b}{3x + 4}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \times \frac{1}{2} + b}{3 \times \frac{1}{2} + 4} = 0 \Leftrightarrow 1 + b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -1$$

Logo, $f(x) = \frac{2x - 1}{3x + 4}$.

4.2. O ponto A pertence ao eixo Oy, logo a sua abcissa é 0.

$f(0) = \frac{2 \times 0 - 1}{3 \times 0 + 4} = -\frac{1}{4}$

Assim, $A\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

5.

5.1. $g(0) = 1$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x - 1}{x - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + 2}{x^2 + x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Como $\lim_{x \to 0^-} g(x) = g(0)$, a função g é contínua à esquerda em $x = 0$. Como $\lim_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim_{x \to 0^+} g(x)$, a função g não é contínua em $x = 0$.

5.2. Assíntotas verticais:

Uma vez que a função g é contínua para $x < 0$ e para $x > 0$, apenas a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de g.

Da alínea anterior, vem que $\lim_{x \to 0^-} g(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$$

Portanto, a reta de equação $y = 3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g.

6. A bissetriz dos quadrantes pares é a reta de equação $y = -x$.

Como o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ e $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico de f, tem-se que:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{f(x)}{x} = -1$$

Logo:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{f(x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x + 1}{x}}{\frac{f(x)}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{f(x)}{x}} =$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

Portanto, a reta de equação $y = -1$ é uma assíntota ao gráfico de g.

Teste n.º 5

GRUPO I

1. $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$

Logo, a opção correta é a (B).

2. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\sqrt{x - 1} - 1) = \sqrt{1 - 1} - 1 = f(1)$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{k(x^2 + x - 2)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{k(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{k(x + 2)}{x + 1} = \frac{3k}{2}$$

Ora, para que a função f seja contínua em $x = 1$, $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$. Então, $\frac{3k}{2} = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$.
Logo, a opção correta é a (C).

3. Uma vez que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, então $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Uma vez que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, então $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

O gráfico de g obtém-se do gráfico de f segundo uma translação associada ao vetor de coordenadas $(2, 1)$. Aplicando a mesma translação às assíntotas de f obtêm-se as assíntotas de g, que são então $x = 2$ e $y = 3$.

Logo, a opção correta é a (A).

4. $$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)' = \frac{2(2x-1) - 2(2x+1)}{(2x-1)^2} =$$
$$= \frac{4x - 2 - 4x - 2}{(2x-1)^2} =$$
$$= \frac{-4}{(2x-1)^2}$$
$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-4}{\left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right)^2} = \frac{-4}{(-2)^2} = -1$$

Assim, sendo α a inclinação da reta t, tem-se $\operatorname{tg} \alpha = -1 \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ$, ou seja, $\alpha = 135^\circ$.

Logo, a opção correta é a (C).

5. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	–	0	+
Variação de f	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

Assim, f é decrescente em $]-1, 1[$, f é crescente em $]1, +\infty[$ e f tem um máximo para $x = -1$, ou seja, a afirmação "f tem um mínimo para $x = -1$" é uma afirmação falsa.

Logo, a opção correta é a (D).

GRUPO II

1.

1.1. Sendo $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$, então $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{x-3}{x-5}$.

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x - 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Uma vez que $g(x) = \frac{x-3}{x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$, então $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g. Logo, $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.2.

1.2.1. $$h(1) = \lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-5}{2x-6} =$$
$$= \frac{-4}{-4} = 1$$
$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} =$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right) =$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} =$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$$

Como $h(1) = \lim_{x \to 1^-} h(x) \neq \lim_{x \to 1^+} h(x)$, então h não é contínua em $x = 1$.

1.2.2. $$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-5}{2x-6} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{5}{x}}{2 - \frac{6}{x}} = \frac{1}{2}$$

Logo, a reta de equação $y = \frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h.

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h.

1.3.

1.3.1. $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-3} = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \wedge x - 3 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$

Assim, $A(5, 0)$, $B(x, f(x)) = \left(x, \frac{x-5}{x-3}\right)$ e $C(x, 0)$.

Logo:

$$a(x) = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{(5-x) \times \frac{x-5}{x-3}}{2} =$$
$$= \frac{-x^2 + 10x - 25}{2x - 6}$$

1.3.2. $$a(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 10x - 25}{2x - 6} = 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 10x - 25}{2x - 6} - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 10x - 25 - 8x + 24}{2x - 6} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x - 1}{2x - 6} = 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 = 0 \wedge 2x - 6 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$
$$a(1) = \frac{1-5}{1-3} = 2$$

Logo, $B(1, 2)$.

1.3.3. Uma vez que $x \in]-\infty, 3[$, só faz sentido estudar a existência de assíntotas oblíquas ao gráfico de a quando x tende para $-\infty$.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 10x - 25}{2x^2 - 6x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1 + \frac{10}{x} - \frac{25}{x^2}}{2 - \frac{6}{x}} = -\frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(a(x) + \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x^2 + 10x - 25}{2x - 6} + \frac{1}{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 10x - 25 + x^2 - 3x}{2x - 6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{7x - 25}{2x - 6} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{7 - \frac{25}{x}}{2 - \frac{6}{x}} = \frac{7}{2}$$

Assim, a reta de equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de a.

1.4. $$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{x-5}{x-3} - 3}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{x - 5 - 3x + 9}{x - 3}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{-2x + 4}{(x - 2)(x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{-2}{x - 3} = 2$$

2.

2.1. $$C'(t) = \left(\frac{2t + 1}{t^2 + 20}\right)' = \frac{2(t^2 + 20) - 2t(2t + 1)}{(t^2 + 20)^2} =$$

$$= \frac{2t^2 + 40 - 4t^2 - 2t}{(t^2 + 20)^2} = \frac{-2t^2 - 2t + 40}{(t^2 + 20)^2}$$

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2t^2 - 2t + 40}{(t^2 + 20)^2} = 0$$

$\Leftrightarrow -2t^2 - 2t + 40 = 0 \wedge (t^2 + 20)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow t = 4 \vee t = -5$

Como $t \geq 0$, então $t = 4$.

t	0		4	$+\infty$
Sinal de C'		+	0	–
Variação de C		↗	Máx.	↘

Logo, a concentração do medicamento é máxima 4 horas após a sua administração.

2.2. $$\lim_{t \to +\infty} C(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t + 1}{t^2 + 20} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{20}{t^2}} = 0$$

Quando $t \to +\infty$, a concentração do medicamento na corrente sanguínea tende para zero.

3.

3.1. $$m = f'(1) = \frac{1 - 3}{2 \times 1 \times 2^2} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

A equação reduzida da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é da forma $y = -\frac{1}{4}x + b$.

O ponto A pertence ao gráfico de f e à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, logo:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$$

Assim, a equação reduzida da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

3.2. $$\lim_{x \to 1} \frac{(f(x))^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} \times \frac{f(x) + \frac{1}{2}}{x + 1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} \times \lim_{x \to 1} \frac{f(x) + \frac{1}{2}}{x + 1} =$$

$$= f'(1) \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + 1} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

Teste n.º 6

GRUPO I

1. Como t.m.v.$_{[a,\, b]}(f) = 3$, então o declive da reta AB é 3.

$\overline{OC} = \overline{CD} = 2$, logo $\overline{OD} = 4$ e $D(0, 4)$.

Assim, a equação reduzida da reta r é $y = 3x + 4$.

Logo, a opção correta é a (D).

2. Uma vez que o gráfico de f' é uma reta, então o gráfico da função f pode ser uma parábola, ou seja, f é uma função polinomial de grau 2.

Por outro lado, $f'(x) > 0$ para $x \in]-\infty, 1[$, $f'(x) < 0$ para $x \in]1, +\infty[$ e $f(1) = 0$, então a função f é crescente em $]-\infty, 1[$ e decrescente em $]1, +\infty[$, ou seja, a parábola que a representa tem a concavidade voltada para baixo.

Se $f(x) = -x^2 + 3x + 2$, então $f'(x) = -2x + 3$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Se $f(x) = -x^2 + 2x + 2$, então $f'(x) = -2x + 2$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Logo, a opção correta é a (C).

3. $d(t) = 5t^2$, logo $d'(t) = 10t$.

Assim, $d'(10) = 10 \times 10 = 100$, pelo que a velocidade do corpo ao fim de 10 segundos é 100 m/s.

Logo, a opção correta é a (B).

4. No diagrama 1 os pontos estão sobre a mesma reta de declive positivo, pelo que $r_1 = 1$.

No diagrama 2 observa-se uma correlação linear negativa, pelo que $r_2 = -0{,}6$.

No diagrama 3 não há correlação, pelo que $r_3 = 0$.

Logo, a opção correta é a (A).

5. Uma vez que o declive da reta de mínimos quadrados é 1,41, então a equação dessa reta é da forma $y = 1{,}41x + b$.
O ponto de coordenadas (2,15; 1,99) pertence à reta de mínimos quadrados.
$1{,}99 = 1{,}41 \times 2{,}15 + 2{,}15$ é uma proposição falsa.
$1{,}99 = 1{,}41 \times 2{,}15 + 1{,}99$ é uma proposição falsa.
$1{,}99 = 1{,}41 \times 2{,}15 - 1{,}04$ é uma proposição verdadeira.
Logo, a opção correta é a (C).

GRUPO II

1.

1.1. $f'(1) = \dfrac{-4}{1+2+1} = -1$

Logo, como existe derivada finita da função f em $x = 1$, e como toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto, pode concluir-se que f é contínua em $x = 1$.

1.2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x}{x^4 + 2x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f'	–	0	+
Variação de f	↘	Mín.	↗

Assim, a função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ e tem um mínimo em $x = 0$.

1.3. $(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \times g'(2) = f'(1) \times (-1) = (-1) \times (-1) = 1$

2. Tem-se que $f(2) = 3 \Leftrightarrow 8 + 2a + b = 3 \Leftrightarrow b = -5 - 2a$

$x + 5y = 6 \Leftrightarrow 5y = -x + 6 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{6}{5}$

$f'(x) = 4x + a$

Assim, $f'(2) = 5 \Leftrightarrow 8 + a = 5 \Leftrightarrow a = -3$.
Logo, $b = -5 + 6 = 1$.

3.

3.1. A variável explicativa é o número de horas de estudo por dia. A variável resposta é a classificação.

3.2. Média do número de horas de estudo por dia:

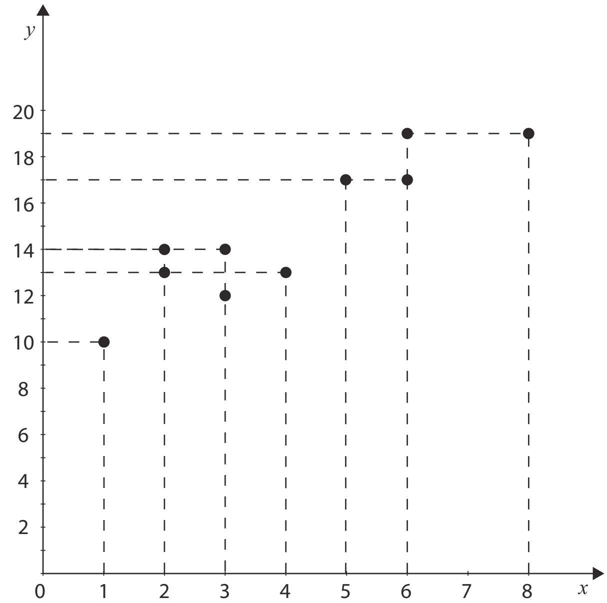
$$\bar{x} = \frac{2+4+6+3+1+6+8+3+2+5}{10} = 4$$

Média das classificações:

$$\bar{y} = \frac{14+13+17+14+10+19+19+12+13+17}{10} =$$

$= 14{,}8$

3.3.



Existe correlação linear positiva.

3.4. $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x\, SS_y}} = \dfrac{55}{\sqrt{44 \times 83{,}6}} \approx 0{,}91$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
2	14	–2	–0,8	1,6	4	0,64
4	13	0	–1,8	0	0	3,24
6	17	2	2,2	4,4	4	4,84
3	14	–1	–0,8	0,8	1	0,64
1	10	–3	–4,8	14,4	9	23,04
6	19	2	4,2	8,4	4	17,64
8	19	4	4,2	16,8	16	17,64
3	12	–1	–2,8	2,8	1	7,84
2	13	–2	–1,8	3,6	4	3,24
5	17	1	2,2	2,2	1	4,84
				$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 55$	$SS_x = 44$	$SS_y = 83{,}6$

3.5. $r = a\sqrt{\dfrac{SS_x}{SS_y}} \Leftrightarrow a = r\sqrt{\dfrac{SS_y}{SS_x}}$

Logo, $a \approx 0{,}91\sqrt{\dfrac{83{,}6}{44}} \approx 1{,}25$.

3.6. $y = 1{,}25x + b$
$(\bar{x}, \bar{y}) = (4; 14{,}8)$ pertence à reta, logo:
$14{,}8 = 1{,}25 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 9{,}8$
Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = 1{,}25x + 9{,}8$.

3.7. $1{,}25 \times 7 + 9{,}8 = 18{,}55$ seria a classificação esperada de um aluno que tenha estudado 7 horas por dia.

3.8. $16 = 1{,}25x + 9{,}8 \Leftrightarrow 1{,}25x = 6{,}2 \Leftrightarrow x = 4{,}96$
Um aluno que obteve 16 valores teria estudado, aproximadamente, 5 horas por dia.

Teste Global

GRUPO I

1. $\text{sen}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)+\cos\left(\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=$

$=\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

Logo, a opção correta é a (D).

2. Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é isósceles e que $\overline{AC}=\overline{BC}$, então os vetores $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{MP}$, onde M é o ponto médio de $[AB]$ são colineares. Assim, o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0$ é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

Logo, a opção correta é a (A).

3. $u_n=-2 \Leftrightarrow -\frac{5n+10}{3n}=-2 \Leftrightarrow 5n+10=6n \Leftrightarrow n=10$

Ou seja, existe um termo da sucessão (u_n) igual a -2.

$u_{n+1}-u_n=-\frac{5n+5+10}{3n+3}+\frac{5n+10}{3n}=$

$=-\frac{5n+15}{3(n+1)}+\frac{5n+10}{3n}=$

$=\frac{-(5n+15)n+(5n+10)(n+1)}{3(3n+3)n}=$

$=\frac{10}{3n(n+1)}>0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$

Ou seja, a sucessão (u_n) é monótona crescente.

$u_1=-\frac{5+10}{3}=-5$ é um minorante da sucessão e 0 é um seu majorante, uma vez que todos os seus termos são negativos, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

$\lim\left(-\frac{5n+10}{3n}\right)=\lim\left(-\frac{5+\frac{10}{n}}{3}\right)=-\frac{5}{3}$, ou seja, a sucessão (u_n) não é divergente.

Logo, a opção correta é a (D).

4. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(2x+3)=11$

$f_1(1)=3+2=5$, pelo que a função f_1 não representa uma extensão contínua da função f de domínio $\mathbb{R}$.

$f_2(1)=1+1=2$, mas $f_2(4)=4+1=5$, pelo que a função f_2 não representa uma extensão contínua da função f de domínio $\mathbb{R}$.

$f_3(1)=3-1=2$ e $f_3(4)=12-1=11$, pelo que a função f_3 representa uma extensão contínua da função f de domínio $\mathbb{R}$.

Logo, a opção correta é a (C).

5. Como o coeficiente de correlação não é igual ao declive da reta de mínimos quadrados, excluem-se as hipóteses (B) e (C).

$0{,}25\times 4+3{,}6=4{,}6$

Logo, a opção correta é a (A).

GRUPO II

1.

1.1. $\overline{OC}=1$

Seja D a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox.

$\overline{OD}=\cos\alpha$

Logo, $A=\frac{\cos\alpha\times 1}{2}=\frac{\cos\alpha}{2}=f(\alpha)$.

1.2. Se $\alpha=\frac{\pi}{6}$, então $P\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$C(0,-1)$

$\overrightarrow{CP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)-(0,-1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$

Logo, o declive da reta CP é:

$m=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

Como $C(0,-1)$ pertence a esta reta, tem-se que a equação reduzida da reta CP é $y=\sqrt{3}x-1$.

1.3. $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(-3\pi+\theta)+\text{tg}\,(-\pi-\theta)=-\frac{3}{7}$

$\Leftrightarrow -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)-\text{tg}\,(\pi+\theta)=-\frac{3}{7}$

$\Leftrightarrow -\cos\theta+\cos\theta-\text{tg}\,\theta=-\frac{3}{7}$

$\Leftrightarrow \text{tg}\,\theta=\frac{3}{7}$

Assim:

$1+\text{tg}^2\,\theta=\frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1+\frac{9}{49}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\Leftrightarrow \frac{58}{49}=\frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta=\frac{49}{58}$

Logo, como $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta=\sqrt{\frac{49}{58}}=\frac{7\sqrt{58}}{58}$.

Então, $f(\theta)=\frac{\cos\theta}{2}=\frac{7\sqrt{58}}{116}$.

1.4. $(1-\text{sen}\,x)\left(\frac{1}{\cos x}+\text{tg}\,x\right)=$

$=(1-\text{sen}\,x)\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right)=$

$=(1-\text{sen}\,x)\left(\frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}\right)=\frac{1-\text{sen}^2 x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x}{\cos x}=$

$=\cos x=2\times\frac{\cos x}{2}=2f(x)$

2.

2.1. O vetor $\overrightarrow{EF}(1, -2, -2)$ é um vetor normal ao plano ABC e o ponto $F(-2, 1, -1)$ é um ponto pertencente a esse plano.
Assim:
$1(x+2) - 2(y-1) - 2(z+1) = 0$
$\Leftrightarrow x + 2 - 2y + 2 - 2z - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 2y - 2z + 2 = 0$ é uma equação cartesiana do plano ABC.

2.2. As retas ED e EA são retas concorrentes que definem o plano ADE.
$\vec{r}(1, -5, 1)$ é um vetor diretor da reta EA.
$\vec{s}(1, 1, 1)$ é um vetor diretor da reta ED.
O ponto $(-3, 3, 1)$ é um ponto da reta EA e também do plano ADE.
Logo, $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + r(1, -5, 1) + s(1, 1, 1)$, $r, s \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial do plano ADE.

2.3. O ângulo AEF é o ângulo entre o vetor diretor da reta EA e o vetor $\overrightarrow{EF}$.
$\vec{r}(1, -5, 1)$ é um vetor diretor da reta EA.
$\overrightarrow{EF}(1, -2, -2)$
$\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
$\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$
$\vec{r} \cdot \overrightarrow{EF} = 1 + 10 - 2 = 9$
$\cos(A\hat{E}F) = \dfrac{9}{3\sqrt{3} \times 3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
Logo, $A\hat{E}F \approx 54{,}74^\circ$.

2.4. O ponto E pertence às retas EA e ED.
ED: $(x, y, z) = (-6, 1, -2) + k'(1, 1, 1)$, $k' \in \mathbb{R}$
Assim, os pontos da reta ED são da forma
$(-6 + k', 1 + k', -2 + k')$, $k' \in \mathbb{R}$
Substituindo na condição que define EA:

$$\begin{cases} -6 + k' = -3 + k \\ 1 + k' = 3 - 5k \\ -2 + k' = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = 3 + k \\ 1 + 3 + k = 3 - 5k \\ -2 + 3 + k = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 6k = -1 \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = \dfrac{17}{6} \\ \\ k = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Logo, $E\left(-6 + \dfrac{17}{6}, 1 + \dfrac{17}{6}, -2 + \dfrac{17}{6}\right) = \left(-\dfrac{19}{6}, \dfrac{23}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$.

3.

3.1. $b_1 = 15$
A sucessão é uma progressão geométrica, uma vez que a razão entre dois termos consecutivos é 0,6. Assim, $b_n = b_1 \times r^{n-1} = 15 \times 0{,}6^{n-1}$.

3.2. $\lim S_n = \lim\left(15\,\dfrac{1 - 0{,}6^n}{1 - 0{,}6}\right) = \dfrac{15}{0{,}4} = 37{,}5$

4. **Se $n = 1$:**
$2^{1-1} = 2^1 - 1 \Leftrightarrow 2^0 = 2 - 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, que é uma proposição verdadeira.
$n > 1$:
Hipótese: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
Tese: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1$
Demonstração:
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n =$
$= 2 \times 2^n - 1 =$
$= 2^{n+1} - 1$, como queríamos demonstrar.
Logo, $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n - 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

5.

5.1. f é uma função racional, logo é contínua em todo o seus domínio, ou seja, é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, não existem assíntotas verticais ao gráfico de f.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{2x^2 + 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{2 + \dfrac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 3}{2x^2 + 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{2 + \dfrac{4}{x^2}} = 0$$

Logo, $y = 0$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f.

5.2. $g'(x) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}\right)' = \dfrac{2x\,(x^2 + 2) - 2x\,(x^2 + 1)}{(x^2 + 2)^2} =$

$= \dfrac{2x^3 + 4x - 2x^3 - 2x}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{2x}{(x^2 + 2)^2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de g'	$-$	0	$+$
Variação de g	↘	Mín.	↗

Assim, a função g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ e tem um mínimo em $x = 0$.

5.3. $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{2x - 3}{2x^2 + 4} - \left(-\dfrac{1}{6}\right)}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{2x - 3}{2x^2 + 4} + \dfrac{1}{6}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6x - 9 + x^2 + 2}{3(x^2 + 2)(x - 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 6x - 7}{3(x^2 + 2)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 7)}{3(x^2 + 2)(x - 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 7}{3(x^2 + 2)} = \dfrac{8}{9}$

5.4. $f'(x) = \left(\dfrac{2x-3}{2x^2+4}\right)' = \dfrac{2(2x^2+4) - 4x(2x-3)}{(2x^2+4)^2} =$

$= \dfrac{4x^2 + 8 - 8x^2 + 12x}{(2x^2+4)^2} = \dfrac{-4x^2 + 12x + 8}{(2x^2+4)^2}$

Os valores de x para os quais a reta tangente ao gráfico da função f é horizontal são os valores de x tais que:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-4x^2+12x+8}{(2x^2+4)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x^2 + 12x + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

6. $a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5} x_i y_i - 5\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5} x_i y_i - 5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5} (x_i)^2 - 5\overline{x}^2} =$

$= \dfrac{2819 - 5 \times \dfrac{72}{5} \times \dfrac{198}{5}}{1122 - 5\left(\dfrac{72}{5}\right)^2} \approx 0{,}3779 \approx -0{,}38$

$b = \overline{y} - a\overline{x} \approx \dfrac{198}{5} + 0{,}3779 \times \dfrac{72}{5} \approx 45{,}04$

Logo, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = -0{,}38x + 45{,}04$.