Teste de Matemática A

2018 / 2019

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Seja a um número real não nulo.

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r e o plano α definidos, respetivamente, por:

$$r: (x, y, z) = (2, -1, 1) + k\left(-1, \frac{1}{2}, -1\right), k \in \mathbb{R}$$

$$\alpha: -a^2x + ay - 4z = 3$$

Sabe-se que a reta r é perpendicular ao plano α.

Qual é o valor de a?

(A) -2

(B) $-\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{2}$

(D) 2

2. Considere as funções f e g definidas, no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, por $f(x) = 2\text{sen}^2(x) + \text{sen}(x) + 1$ e $g(x) = \text{sen}(x) + \cos(x) + 2$.

2.1. Determine, recorrendo a processos analíticos, as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e de g.

2.2. Sejam A e B os pontos de interseção do gráfico de f e de g com o eixo Oy, respetivamente.

Seja C o ponto de ordenada máxima do gráfico de f pertencente ao intervalo $]0, \pi[$.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do triângulo $[ABC]$.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- assinalar os pontos A, B e C;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B;
- indicar as coordenadas do ponto C arredondadas às centésimas;
- desenhar o triângulo $[ABC]$;
- apresentar o valor pedido com aproximação às décimas.

3. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{n+3}{n+1}$ e uma sucessão (v_n) limitada.

Qual das seguintes afirmações é falsa?

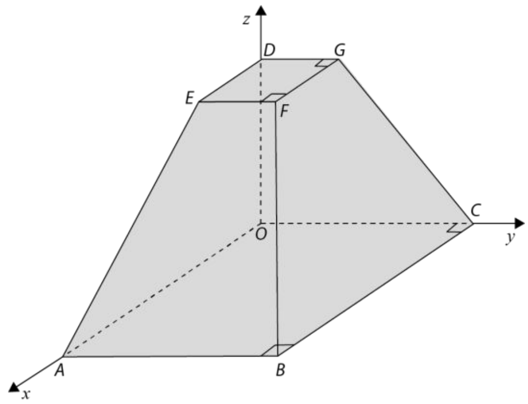
(A) (u_n) é monótona decrescente.

(B) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n \leq 2$.

(C) Não existe $\lim\ [(u_n - 1) \times v_n]$.

(D) (u_n) é convergente.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o sólido $[OABCDEFG]$ representado na figura.



Sabe-se que:

- os pontos A, C e D pertencem aos semieixos Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o plano ABE é definido por $4x + z = 16$;
- a face $[OABC]$ é um retângulo;
- a face $[DEFG]$ é um retângulo contido no plano definido pela condição $z = 8$;
- a reta DE é paralela à reta OA;
- o ponto C tem coordenadas $(0, 3, 0)$;
- $\overline{DG} = 1$.

4.1. Determine a amplitude do ângulo OBF.

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

4.2. Sabe-se que o plano ABE é o plano mediador do segmento de reta $[OP]$.

Determine as coordenadas de P.

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, dois pontos distintos A e B.Seja S o conjunto dos pontos P do espaço que verificam a condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O conjunto S é a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

(B) O conjunto S é o plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

(C) O conjunto S é o plano tangente à superfície esférica de diâmetro $[AB]$ em B.

(D) O conjunto S é o plano perpendicular à reta AB.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	**2.1**	**2.2**	**3.**	**4.1**	**4.2**	**5.**	
8	15	15	8	15	20	8	**89**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Qual é o valor exato de $\text{tg}\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 2\text{sen}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$?

(A) $2\sqrt{2}$

(B) $3\sqrt{2}$

(C) $2\sqrt{3}$

(D) $3\sqrt{3}$

7. Os três primeiros termos de uma progressão aritmética são -3, x e y, respetivamente.

Os três primeiros termos de uma progressão geométrica são y, x e 1, respetivamente.

Sabe-se que x e y são positivos.

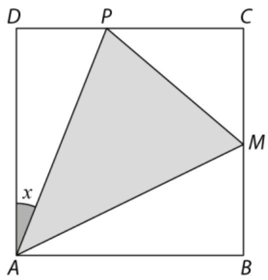
Determine, por processos analíticos, o quarto termo de cada uma das progressões.

8. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 2.

O ponto M é o ponto médio de $[BC]$.

O ponto P desloca-se sobre o lado $[CD]$.

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo PAD $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.



A área do triângulo $[AMP]$ pode ser dada, em função de x, por:

(A) $2 - \text{tg}\, x$

(B) $4 - 2\text{tg}\, x$

(C) $\frac{\text{tg}\, x}{2}$

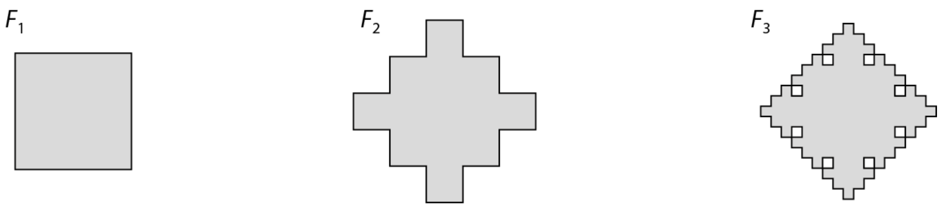
(D) $\frac{\text{sen}\, x \times \cos x}{2}$

9. Considere o quadrado F_1, de lado 3.

Cada um dos seus lados é dividido em três partes iguais e, a meio do lado, construímos para o exterior um quadrado de lado 1.

Elimina-se o lado dos novos quadrados que interseta o quadrado inicial, obtendo-se F_2.

Aplica-se a mesma construção à figura F_2: cada um dos lados de F_2 é dividido em três partes iguais e, a meio desse lado, constrói-se para o exterior um quadrado de lado $\frac{1}{3}$ e elimina-se o lado do novo quadrado comum à figura F_2, obtendo-se assim a figura F_3.



Suponhamos que continuamos este processo sobre os lados do polígono obtido.

Sejam L_n o número de lados, C_n o comprimento do lado e P_n o perímetro da figura F_n.

9.1. Determine o valor de L_3, C_3 e de P_3.

9.2. Mostre que o perímetro P_n da figura F_n pode ser definido por $\frac{36}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

9.3. Determine $\lim P_n$.

10. Seja (a_n) a sucessão de números reais positivos tal que $a_1 < 2$ e $a_{n+1} = \frac{3a_n+4}{a_n+3}, n \in \mathbb{N}$.

10.1. Mostre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 2$.

10.2. Utilizando a alínea anterior, estude a monotonia de (a_n).

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
6.	**7.**	**8.**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**10.1**	**10.2**	
15	8	8	15	15	15	20	15	**111**

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (D)

Sabemos que r é perpendicular ao plano α, logo:

$$\frac{-a^2}{-1}=\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{-4}{-1}\Leftrightarrow a^2=4\ \wedge\ 2a=4\Leftrightarrow (a=-2\ \vee\ a=2)\ \wedge\ a=2\Leftrightarrow a=2$$

Então, $a=2$.

2.

2.1. $f(x)=g(x)$

$2\text{sen}^2(x)+\text{sen}(x)+1=\text{sen}(x)+\cos(x)+2$

$\Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2(x)\right)-\cos(x)+1-2=0$

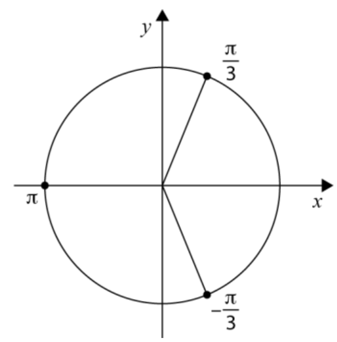
$\Leftrightarrow -2\cos^2(x)-\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-2)\times 1}}{-4}$

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1\pm 3}{-4}$

$\Leftrightarrow \cos x=-1\ \vee\ \cos x=\frac{1}{2}$

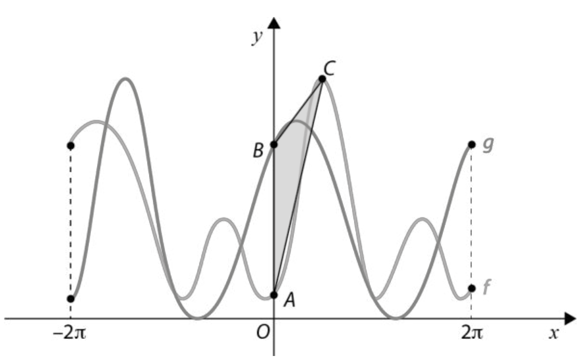
$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi\ \vee\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \vee\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$



Em $[-2\pi,2\pi]$, as soluções são:

$x=-\frac{5\pi}{3}$, $x=-\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\pi$ e $x=\frac{5\pi}{3}$

2.2.



$f(0)=1$ e $g(0)=3$

$A(0,1)$ $\quad B(0,3)$ $\quad C(a,b)$

$a\approx 1{,}57$ e $b\approx 4{,}00$

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times \text{abcissa de } C}{2}\approx\frac{2\times 1{,}57}{2}=1{,}57$$

Assim, a área pedida, com aproximação às décimas, é igual a 1,6 unidades de área.

3. Opção (C)

Sabe-se que $u_n = \frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$.

- À medida que n aumenta, também $n+1$ aumenta e, consequentemente, $\frac{2}{n+1}$ diminui e $1+\frac{2}{n+1}$ também diminui. Logo, (u_n) é decrescente.
- $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{2}{n+1} \leq 1$, logo $1 < 1 + \frac{2}{n+1} \leq 2$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n \leq 2$.
- $\lim u_n = 1$, logo (u_n) é convergente.
- $\lim \ [(u_n - 1) \times v_n] = 0$, pois (v_n) é limitada e $\lim(u_n - 1) = 0$.

4.

4.1. Sabemos que $A(a, 0, 0)$, com $a \in \mathbb{R}$.

Como A pertence ao plano ABE, então $4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$.

Logo, $A(4, 0, 0)$.

Como $[OABC]$ é um retângulo e $A(4, 0, 0)$ e $C(0, 3, 0)$, então $B(4, 3, 0)$.

D pertence ao eixo Oz, $[DEFG]$ é um retângulo, DE é paralela a OA e $\overline{DG} = 1$, então $G(0,1,8)$.

Além disso, $F = E + \overrightarrow{DG}$.

Sabemos que $E(e, 0,8)$ e E pertence ao plano ABE:

$4e + 8 = 16 \Leftrightarrow 4e = 8 \Leftrightarrow e = 2$

Assim, $F = (2,0,8) + (0,1,0) = (2,1,8)$.

$O\hat{B}F = (\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BF}})$

$\overrightarrow{BO} = O - B = (-4, -3, 0)$ $\qquad \|\overrightarrow{BO}\| = \sqrt{16+9} = 5$

$\overrightarrow{BF} = F - B = (-2, -2, 8)$ $\qquad \|\overrightarrow{BF}\| = \sqrt{4+4+64} = \sqrt{72}$

$\overrightarrow{BO} . \overrightarrow{BF} = 8 + 6 = 14$

$$\cos\left(O\hat{B}F\right) = \frac{14}{5 \times \sqrt{72}} \Leftrightarrow O\hat{B}F = cos^{-1}\left(\frac{14}{5 \times \sqrt{72}}\right)$$

$$O\hat{B}F \approx 70{,}7°$$

4.2. ABE é o plano mediador do segmento de reta $[OP]$.

Comecemos por definir vetorialmente a reta OP, que sabemos ser perpendicular ao plano ABE:

$$(x, y, z) = (0,0,0) + k(4,0,1), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta OP é $(4k, 0, k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Determinemos a interseção da reta OP com o plano ABE:

$4(4k) + k = 16 \Leftrightarrow 17k = 16 \Leftrightarrow k = \frac{16}{17}$

Seja $I\left(\frac{64}{17}, 0, \frac{16}{17}\right)$ o ponto de interseção da reta OP com o plano ABE.

$$P = I + \overrightarrow{OI} = \left(\frac{64}{17}, 0, \frac{16}{17}\right) + \left(\frac{64}{17}, 0, \frac{16}{17}\right) =$$

$$= \left(\frac{128}{17}, 0, \frac{32}{17}\right)$$

5. Opção (A)

A condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ define, no espaço, a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

Caderno 2

6. Opção (B)

Seja $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Assim:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = 9 - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = 8 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm 2\sqrt{2}$$

Como $\alpha \in [0, \pi]$ e $\cos\alpha > 0$, então $\alpha \in 1.^{\circ}\,\mathrm{Q}$, logo, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$.

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 2\operatorname{sen}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

7. $-3, x, y, \ldots$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética, logo $y - x = x + 3$.

$y, x, 1, \ldots$ são os três primeiros termos de uma progressão geométrica, logo $\frac{1}{x} = \frac{x}{y}$.

$$\begin{cases} y - x = x + 3 \\ \frac{1}{x} = \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x + 3 \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2} \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \vee \underbrace{\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}}_{\text{condição impossível, pois } x > 0} \Leftrightarrow x = 3 \ \wedge \ y = 9$$

$-3, \xrightarrow{+6} 3, \xrightarrow{+6} 9, \ldots$ são os três primeiros termos da progressão aritmética, logo 15 é o quarto termo da progressão aritmética.

$9, \xrightarrow{:3} 3, \xrightarrow{:3} 1, \ldots$ são os três primeiros termos da progressão geométrica, logo $\frac{1}{3}$ é o quarto termo da progressão geométrica.

8. Opção (A)

$\text{tg}x = \frac{\overline{DP}}{2} \Leftrightarrow \overline{DP} = 2\text{tg}x$

$\overline{CP} = 2 - 2\text{tg}x$

$A_{[AMP]} = A_{[ABCD]} - A_{[ADP]} - A_{[PCM]} - A_{[MBA]} =$

$= 2^2 - \frac{2\times 2\text{tg}x}{2} - \frac{(2-2\text{tg}x)\times 1}{2} - \frac{2\times 1}{2} =$

$= 4 - 2\text{tg}x - (1 - \text{tg}x) - 1 =$

$= 4 - 1 - 1 - 2\text{tg}x + \text{tg}x =$

$= 2 - \text{tg}x$

9.

9.1.

		L_n	C_n	P_n
$n = 1$	(F_1)	4 $\times 5$	3 $\times \frac{1}{3}$	12
$n = 2$	(F_2)	20 $\times 5$	1 $\times \frac{1}{3}$	20
$n = 3$	(F_3)	100	$\frac{1}{3}$	$\frac{100}{3}$

9.2. A sucessão (L_n) do número de lados é uma progressão geométrica de razão 5 e primeiro termo igual a 4, logo a expressão do termo geral é $L_n = 4 \times 5^{n-1}$.

A sucessão (C_n) do comprimento do lado da figura F_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 3, logo a expressão do termo geral é $C_n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

A sucessão (P_n) do perímetro da figura F_n admite como termo geral a expressão:

$P_n = 4 \times 5^{n-1} \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 12 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} =$

$= 12 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n} \times \frac{3}{5} =$

$= \frac{36}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n}$

9.3. $\lim P_n = \lim \left(\frac{36}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n\right) = \frac{36}{5} \times \lim \left(\frac{5}{3}\right)^n = \frac{36}{5} \times (+\infty) = +\infty$

10. Seja $P(n)\colon a_n < 2$.

10.1. (i) $P(1)$ é verdadeira

$a_1 < 2$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): a_n < 2$ (hipótese de indução)

$P(n+1): a_{n+1} < 2$ (tese de indução)

$a_{n+1} - 2 = \frac{3a_n+4}{a_n+3} - 2 = \frac{3a_n+4-2a_n-6}{a_n+3} = \frac{a_n-2}{a_n+3}$

Por hipótese de indução, $a_n < 2$, ou seja, $a_n - 2 < 0$, logo $\frac{a_n-2}{a_n+3} < 0$, pois $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Concluímos, assim, que $a_{n+1} - 2 < 0$, isto é, $a_{n+1} < 2$.

Por (i), (ii) e pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 2$ é uma proposição verdadeira.

10.2. $a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n+4}{a_n+3} - a_n = \frac{3a_n+4-(a_n)^2-3a_n}{a_n+3} = \frac{4-(a_n)^2}{a_n+3}$

Pela alínea anterior, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 2$ e, pelas condições do enunciado, sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$.

Então:

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 2 \Rightarrow (a_n)^2 < 4$

$\Rightarrow 4 - (a_n)^2 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n + 3 > 0$, logo, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n > 0$, ou seja, (a_n) é crescente.