Teste de Matemática A

2020 / 2021

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Para cada valor real de k, considere a equação $\operatorname{sen}\alpha = k^2 - 2k$, onde α está expresso em radianos.

Quais são os valores reais de k, para os quais a equação é possível em $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$?

(A) $]0, 2[$

(B) $[0, 2]$

(C) $[0, 2]\backslash\{1\}$

(D) $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

2. Considere as funções reais de variável real f e g, cujos argumentos estão expressos em radianos, definidas por:

$$f(x) = 3\operatorname{sen}x \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{3}\,\operatorname{tg}x\,\operatorname{sen}x$$

2.1. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, uma expressão geral para as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

2.2. Considere a representação gráfica da função f, no intervalo $[0, \pi]$.

Sejam A e B os pontos de interseção do gráfico de f, nesse intervalo, com o eixo das abcissas.

Considere um ponto P que se desloca sobre o gráfico de f no intervalo dado, nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto B.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do triângulo $[ABP]$ que tem área máxima.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar as coordenadas dos pontos A e B;
- apresentar o valor pedido com aproximação às décimas.

3. Considere, num referencial o.n. Oxy, a reta r de equação $y = \frac{3}{5}x + 1$.

3.1. Seja α a inclinação da reta r. Qual é o valor de $\operatorname{sen}\alpha$?

(A) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$ **(B)** $-\frac{3\sqrt{34}}{34}$ **(C)** $\frac{5\sqrt{34}}{34}$ **(D)** $-\frac{5\sqrt{34}}{34}$

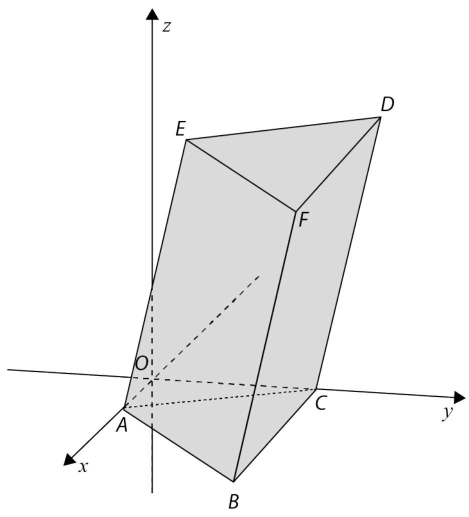
3.2. Seja T o ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas.

Sabe-se que a reta r é tangente a duas circunferências, ambas de raio $2\sqrt{34}$, no ponto T.

Determine as coordenadas dos centros dessas circunferências.

4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:



- o ponto A pertence ao eixo Ox;
- o ponto C pertence ao eixo Oy;
- o ponto B tem coordenadas $(3, 2, -7)$;
- a altura do prisma é 11;
- $3x + 2y + z = 6$ é uma equação do plano ABC.

4.1. Averigúe se as bases do prisma são triângulos equiláteros.

4.2. Seja G o ponto simétrico do ponto B relativamente ao plano xOz .

Em qual das opções seguintes se encontra uma condição que define a superfície esférica de centro G e que passa na origem do referencial?

(A) $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-7)^2 = 62$

(B) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+7)^2 = 62$

(C) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+7)^2 = \sqrt{62}$

(D) $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2 = \sqrt{62}$

4.3. Determine as coordenadas do ponto H, pertencente à reta CD, de tal modo que o triângulo $[OBH]$ seja retângulo em B.

4.4. Determine as coordenadas do ponto D.

5. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} n & \text{se} \quad n \leq 2020 \\ \dfrac{2n+1}{n} & se \quad n > 2020 \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é divergente.

(B) A sucessão (u_n) é limitada.

(B) A sucessão (u_n) é monótona crescente.

(C) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

6. Qual é o valor real de a para o qual $a-1, a$ e $a+3$ são os primeiros termos de uma progressão geométrica?

(A) 3 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

7. A soma dos primeiros vinte termos de uma progressão aritmética é 50 e a soma dos vinte termos seguintes é -50.

Calcule a soma dos oitenta primeiros termos desta progressão.

- FIM -

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**4.4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
10	20	20	10	25	20	10	20	25	10	10	20	**200**

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (C)

Para $\alpha \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, verifica-se que $-1 < \operatorname{sen} \alpha \leq 0$.

Assim, para que a equação $\operatorname{sen} \alpha = k^2 - 2k$ seja possível em $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, tem que $-1 < k^2 - 2k \leq 0$.

Isto é:

$k^2 - 2k > -1 \ \wedge \ k^2 - 2k \leq 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 0 \ \wedge \ k^2 - 2k \leq 0$

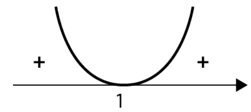
$\Leftrightarrow k \in \mathrm{IR}\backslash\{1\} \ \wedge \ k \in [0, 2]$

$\Leftrightarrow k \in [0, 2]\backslash\{1\}$

Cálculos auxiliares

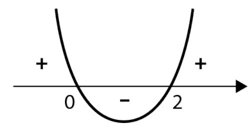
- $k^2 - 2k + 1 = 0 \ \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0$

  $\Leftrightarrow k = 1$



- $k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k-2) = 0$

  $\Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k = 2$



2.

2.1. Pretende-se determinar os valores de x tais que $f(x) = g(x)$:

$3\operatorname{sen}x = \sqrt{3}\,\operatorname{tg}x \operatorname{sen}x \Leftrightarrow 3\operatorname{sen}x - \sqrt{3}\,\operatorname{tg}x \operatorname{sen}x = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x\left(3 - \sqrt{3}\operatorname{tg}x\right) = 0$

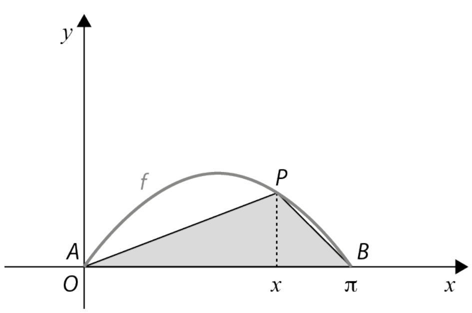
$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x = 0 \ \vee \ 3 - \sqrt{3}\operatorname{tg}x = 0$

$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \vee \ \operatorname{tg}x = \frac{-3}{-\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \vee \ \operatorname{tg}x = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \vee \ x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.2.



$A(0,0)$

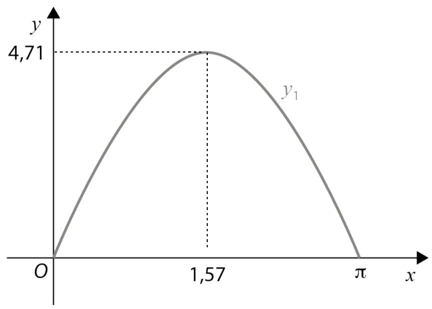
$B(\pi, 0)$

$P(x, 3\operatorname{sen}x)$

Seja A a função que a cada valor de x faz corresponder a área do triângulo $[ABP]$.

$A(x) = \frac{\pi \times f(x)}{2}$, isto é, $A(x) = \frac{\pi \times 3\operatorname{sen}x}{2}$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determinemos o máximo desta função.



$$y_1 = \frac{\pi \times 3\text{sen}x}{2}$$

A área do triângulo de área máxima é 4,7 u.a.

3.

3.1. Opção (A)

Sabemos que $\text{tg}\alpha = \frac{3}{5}$.

Como $\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{9}{25} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{34}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{34}$$

Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tem-se que:

$$\text{sen}^2\alpha + \frac{25}{34} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{34}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{9}{34}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{34}}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\frac{3\sqrt{34}}{34}$$

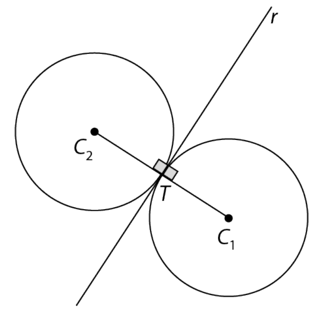
Conclui-se que $\text{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$, pois, sendo α a inclinação de r, tem-se que $\alpha \in [0, 180°[$ e como $\text{tg}\alpha > 0$, então $\alpha \in [0, 90°[$, logo $\text{sen}\alpha > 0$.

3.2. Seja $T(0,1)$ e C_1 e C_2 os centros das circunferências.

Como $m_r = \frac{3}{5}$, um vetor diretor da reta r é, por exemplo, o vetor $\vec{u}$ de coordenadas (5, 3).

Sabemos que $\overrightarrow{TC_1}$ e $\overrightarrow{TC_2}$ são vetores perpendiculares a $\vec{u}$ e de norma $2\sqrt{34}$.

Assim, sabemos que $\overrightarrow{TC_1}$ e $\overrightarrow{TC_2}$ são da forma $k(3,-5), k \in \text{IR}$ e:



$$\|(3k,-5k)\| = 2\sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{9k^2+25k^2} = 2\sqrt{34}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{34k^2} = 2\sqrt{34}$$
$$\Leftrightarrow 34k^2 = 4 \times 34$$
$$\Leftrightarrow k^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow k = 2 \ \vee \ k = -2$$

Assim, por exemplo, $\overrightarrow{TC_1} = (6,-10)$ e $\overrightarrow{TC_2} = (-6,10)$.

$C_1 = T + \overrightarrow{TC_1} = (0,1) + (6,-10) = (6,-9)$ e

$C_2 = T + \overrightarrow{TC_2} = (0,1) + (-6,10) = (-6,11)$

4.

4.1.

- $A(x,0,0), x \in \text{IR}$

  Como A pertence ao plano ABC, então $3x + 0 + 0 = 6$, logo $x = 2$.

  $A(2,0,0)$

- $C(0,y,0), y \in \text{IR}$

  Como C pertence ao plano ABC, então $0 + 2y + 0 = 6$, logo $y = 3$.

  $C(0,3,0)$

$\overline{AC} = \sqrt{(0-2)^2+(3-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2+(2-0)^2+(-7-0)^2} = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54}$

$\overline{BC} = \sqrt{(0-3)^2+(3-2)^2+(0+7)^2} = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$

Como $\overline{AC} \neq \overline{AB} \neq \overline{BC}$, conclui-se que as bases do prisma não são triângulos equiláteros.

4.2. Opção (B)

$B(3,2,-7)$, logo o ponto G, ponto simétrico de B em relação ao plano xOz, tem coordenadas $(3,-2,-7)$.

Raio $= \overline{OG} = \sqrt{(3-0)^2+(-2-0)^2+(-7-0)^2} =$
$= \sqrt{9+4+49} =$
$= \sqrt{62}$

Condição que define a superfície esférica de centro G e raio $\overline{OG}$:

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+7)^2 = 62$$

4.3. O vetor de coordenadas $(3, 2, 1)$ é um vetor normal ao plano ABC, logo é um vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano ABC, como é o caso da reta CD.

Assim, uma equação vetorial da reta CD poderá ser:

$$(x, y, z) = (0, 3, 0) + k(3, 2, 1), k \in \mathbb{R}$$

Como o ponto H pertence à reta CD, então é da forma $(3k, 3 + 2k, k)$, para algum $k \in \mathbb{R}$.

Para que o triângulo $[OBH]$ seja retângulo em B, tem de se verificar $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

Cálculo auxiliar
$\overrightarrow{BO} = (0, 0, 0) - (3, 2, -7) = (-3, -2, 7)$
$\overrightarrow{BH} = (3k, 3 + 2k, k) - (3, 2, -7) = (3k - 3, 2k + 1, k + 7)$

Assim:

$$\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow (-3, -2, 7) \cdot (3k - 3, 2k + 1, k + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow -9k + 9 - 4k - 2 + 7k + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6k = -56$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{28}{3}$$

Logo, as coordenadas de H são $\left(3 \times \frac{28}{3}, 3 + 2 \times \frac{28}{3}, \frac{28}{3}\right)$, isto é, $H\left(28, \frac{65}{3}, \frac{28}{3}\right)$.

4.4. $D = C + \overrightarrow{CD}$

Sabe-se que $\overrightarrow{CD}$ é um vetor da forma $k(3, 2, 1), k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e com norma 11, que é a altura do prisma. Assim, $\|k(3, 2, 1)\| = 11$.

$$\|(3k, 2k, k)\| = 11 \Leftrightarrow \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2 + k^2} = 11$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{14k^2} = 11$$

$$\Leftrightarrow 14k^2 = 11^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{121}{14}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{121}{14}}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\frac{11}{\sqrt{14}}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\frac{11\sqrt{14}}{14}$$

Por observação da figura, $k > 0$ e, assim, $\overrightarrow{CD} = \left(\frac{33\sqrt{14}}{14}, \frac{22\sqrt{14}}{14}, \frac{11\sqrt{14}}{14}\right)$.

Logo:

$$D = C + \overrightarrow{CD} = (0,3,0) + \left(\frac{33\sqrt{14}}{14}, \frac{22\sqrt{14}}{14}, \frac{11\sqrt{14}}{14}\right) = \left(\frac{33\sqrt{14}}{14}, 3 + \frac{22\sqrt{14}}{14}, \frac{11\sqrt{14}}{14}\right)$$

5. Opção (B)

- A sucessão (u_n) é convergente, pois:

  $\lim(u_n) = \lim\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \lim\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$

- A sucessão (u_n) é limitada, pois $1 \leq u_n \leq 2020, \forall n \in \mathrm{IN}$.

  Observe-se que:

  – se $n \leq 2020$, então $1 \leq u_n \leq 2020$;

  – se $n > 2020$, então $2 < u_n \leq 3$.

Cálculo auxiliar

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$

$2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$

- A sucessão (u_n) não é monótona, pois, por exemplo, $u_{2019} = 2019, u_{2020} = 2020$ e $u_{2021} = 2 + \frac{1}{2021}$,

  isto é, $u_{2019} < u_{2020} \quad \wedge \quad u_{2020} > u_{2021}$.

6. Opção (D)

Se $a-1, a$ e $a+3$ são os primeiros termos de uma progressão geométrica, então $\frac{a}{a-1} = \frac{a+3}{a}$.

Logo:

$$a^2 = (a-1)(a+3) \Leftrightarrow a^2 = a^2 + 3a - a - 3 \Leftrightarrow 3 = 2a$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

7. Seja (u_n) a progressão aritmética tal que $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 50$ e $u_{21} + u_{22} + \cdots + u_{40} = -50$.

Assim, sabemos que:

$$\begin{cases} \frac{u_1+u_{20}}{2} \times 20 = 50 \\ \frac{u_{21}+u_{40}}{2} \times 20 = -50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_{20} = 5 \\ u_{21} + u_{40} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 19r) = 5 \\ (u_1 + 20r) + (u_1 + 39r) = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 19r = 5 \\ 2u_1 + 59r = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 5 - 19r \\ 5 - 19r + 59r = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 40r = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 5 - 19 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = \frac{39}{4} \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{39}{8} \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Logo:

$$S_{80} = \frac{u_1 + u_{80}}{2} \times 80 = \frac{\frac{39}{8} + \left(-\frac{119}{8}\right)}{2} \times 80 = -400$$

Cálculo auxiliar

$$u_{80} = u_1 + 79r = \frac{39}{8} + 79 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{119}{8}$$