Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2024/2025)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 11.º 4

2.º Período 20/03/2025 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

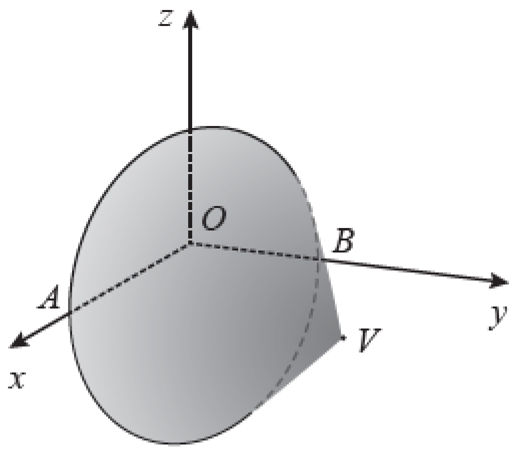
Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

---

1. Na figura, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V.



Sabe-se que:

- a base do cone intersecta o semieixo positivo Ox no ponto $A(8,0,0)$ e o semieixo positivo Oy no ponto $B(0,4,0)$;
- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da base do cone;
- sendo M o ponto médio de $[AB]$, a reta VM está definida pela equação $(x,y,z)=(3,0,0)+k(1,2,0), k\in\mathbb{R}$.

1.1. Qual é o valor de $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$?

(A) -64 **(B)** $-\frac{32}{3}$

(C) 64 **(D)** $\frac{32}{3}$

1.2. Considera as proposições seguintes.

I. A base do cone está contida no plano definido pela equação $x+2y+z-8=0$.

II. As coordenadas do ponto V são $(7,8,1)$.

Justifica que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na tua resposta, apresenta, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática A, fase especial de 2024

2. Seja g a função definida por $g(x)=\dfrac{\left(x^2-400\right)(x+500)}{\left(x^2-20x\right)(500-x)}$.

Qual é a proposição verdadeira?

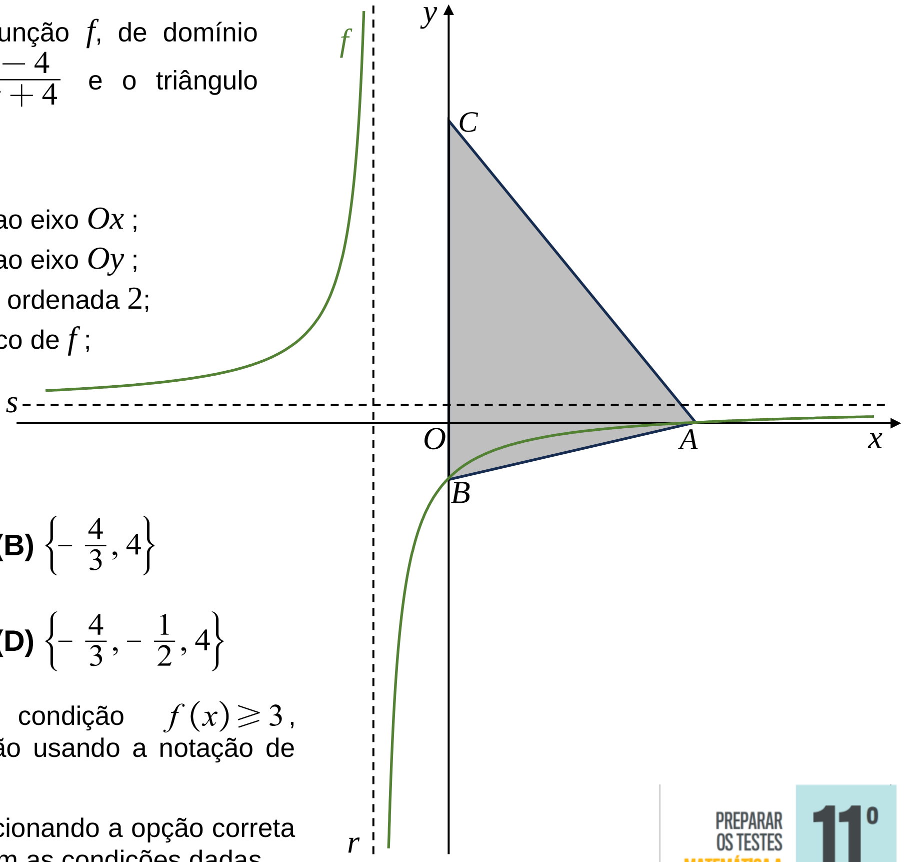
(A) -500, -20 e 20 são os zeros de g;

(B) -500 e -20 são os zeros de g;

(C) -500, -20, 0 e 20 são os zeros de g;

(D) g não tem zeros.

3. Considera, na figura, o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, definida por $f(x)=\dfrac{x-4}{2x+4}$ e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f e ao eixo Ox ;
- o ponto B pertence ao gráfico de f e ao eixo Oy ;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada 2;
- a reta r é a assíntota vertical do gráfico de f ;
- a reta s é a assíntota horizontal do gráfico de f.

3.1. Qual é o conjunto solução da equação $f(x)=3x$?

(A) $\left\{-\frac{4}{3},-\frac{1}{2}\right\}$ **(B)** $\left\{-\frac{4}{3},4\right\}$

(C) $\left\{-\frac{1}{2},4\right\}$ **(D)** $\left\{-\frac{4}{3},-\frac{1}{2},4\right\}$

3.2. Resolve, analiticamente, a condição $f(x)\geqslant 3$, apresentando o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

3.3. Completa o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com as condições dadas.

Escreve, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A equação de r é___**I**___ e a de s é ___**II**___.

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a ___**III**___.

Se $x>-2$, então ___**IV**___.

I	II	III	IV
a) $x=-4$	**a)** $y=1$	**a)** 1	**a)** $f(x)<\frac{1}{2}$
b) $x=-2$	**b)** $y=-\frac{1}{2}$	**b)** 4	**b)** $f(x)=\frac{1}{2}$
c) $x=2$	**c)** $y=\frac{1}{2}$	**c)** 6	**c)** $f(x)>\frac{1}{2}$

4. Admite que a altura de uma girafa, em metros, é dada, t anos após o nascimento, pela função a definida por

$$a(t)=\frac{1,6t+0,8}{0,3t+0,5}$$

4.1. Qual é a altura (em cm e arredondado às unidades) da girafa após uma década de vida?

(A) 480 **(B)** 520 **(C)** 390 **(D)** 660

4.2. Responde a este problema analiticamente.

Se a girafa tiver nascido no início de 2025, em que ano e em que mês ela atingirá os $4{,}5$ metros?

5. Para um certo número real x positivo, considera os três primeiros de uma progressão geométrica:
$x-1$, $x+8$ e x^2-64

Calcula a soma dos doze primeiros termos da progressão.

6. Seja (v_n) a sucessão, de termos positivos e convergente, definida por recorrência por

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{36-11v_n}{5}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

6.1. Pode concluir-se que (v_n) é:

(A) é uma progressão aritmética;

(B) é uma progressão geométrica;

(C) limitada;

(D) monótona.

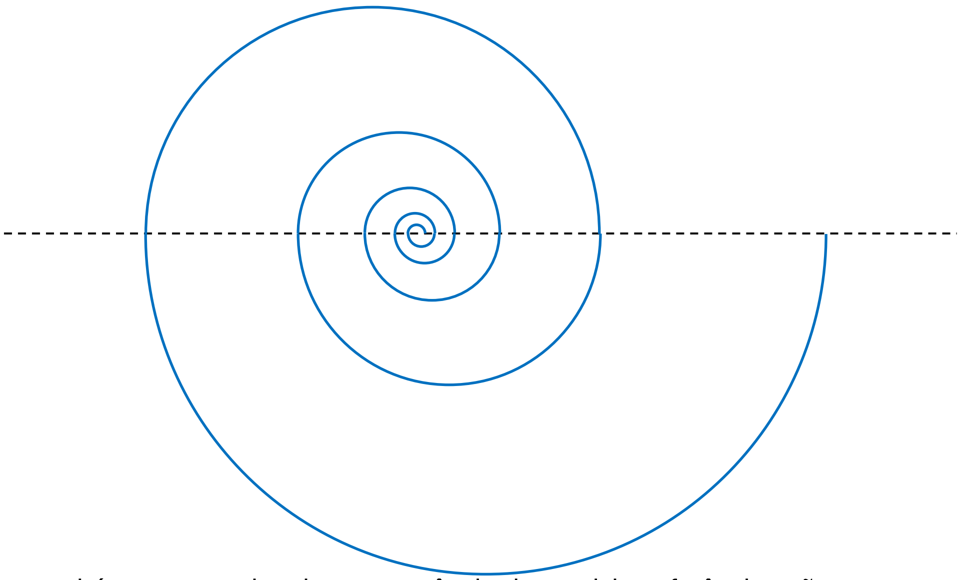
6.2. Determina, sem usar a calculadora, $\lim v_n$.

7. Calcula, sem usar a calculadora:

7.1. $\lim\left(\sqrt{4n^2+7n}-2n\right)$;

7.2. $\lim \dfrac{2^{4n+2}-15^n}{16^{n+1}+10^{n+5}}$.

8. Considera, na figura, parte de uma espiral constituída por uma infinidade de semicircunferências.



Considera também que os raios dessa sequência de semicircunferências são termos consecutivos da progressão geométrica decrescente (a_n).

Sabe-se que $a_1 = 27$ cm e $a_4 = 8$ cm.

Determina o comprimento total da espiral.

Apresenta o valor pedido em cm.

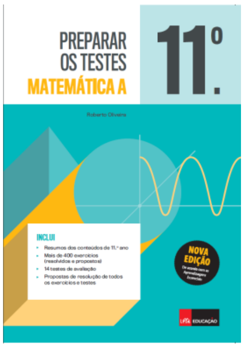
9. Dado um número real k, considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas, respetivamente, por:

$$\begin{cases} u_1 = k \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} - 5, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_n = u_n + 10$$

Sabendo que a soma de todos os termos de (v_n) é 7, calcula k.

Sugestão: Começa por mostrar que (v_n) é uma progressão geométrica.

FIM



COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	
8	16	8	8	16	16	8	16	16	8	16	16	16	16	16	**200**

Formulário

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$