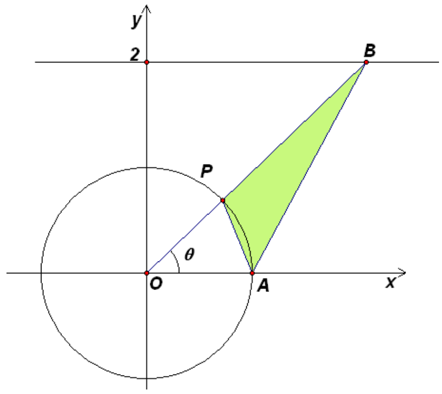
Nome: ____

Ano / Turma: __________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1.ª Parte

Para cada questão indica a opção que consideras correta.

1. Na figura estão representados um triângulo $\left[ABP\right]$ e a circunferência trigonométrica.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- $A\hat{O}P = \theta$ rad, em que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- B é o ponto de interseção da reta OP com a reta de equação $y = 2$.

Qual das seguintes expressões representa a área do triângulo $\left[ABP\right]$ para qualquer $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$?

(A) $\frac{\sin\theta}{2}$ **(B)** $1 - \frac{\sin\theta}{2}$ **(C)** $1 - \cos\theta$ **(D)** $1 + \frac{\cos\theta}{2}$

2. Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considera o plano β definido por:

$$(x, y, z) = (-3, 7, 8) + a(2, -5, 0) + b(1, -4, 3) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}$$

Qual dos seguintes vetores é normal ao plano β ?

(A) $(5, 2, -3)$ **(B)** $(-2, 1, 2)$ **(C)** $(5, 2, 1)$ **(D)** $(7, 1, 4)$

3. Considera a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \begin{cases} 6n + 8 & \text{se} \quad n \leq 5 \\ n^2 + k & \text{se} \quad n > 5 \end{cases} \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Sabe-se que (u_n) é **estritamente crescente**.

O valor de k pode ser:

(A) -1 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 1

4. Considera a sucessão (v_n) definida por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{7}{2}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sabe-se que 250 é termo da sucessão.
A ordem deste termo é:

(A) 73 **(B)** 50 **(C)** 65 **(D)** 82

5. Em relação a uma sucessão (u_n) sabe-se que todos os termos são negativos e é crescente.

Das afirmações seguintes, indica a que é necessariamente verdadeira.

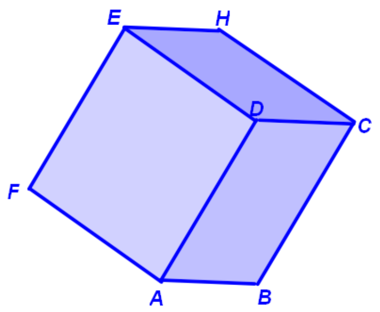
(A) O conjunto dos termos da sucessão não tem minorantes
(B) -1 é um majorante do conjunto dos termos da sucessão
(C) O conjunto dos termos da sucessão tem máximo.
(D) A sucessão é limitada

2.ª Parte

Dá respostas completas apresentando todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Na figura está representado um cubo.
Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ está contida no plano α definido pela equação $3x - y - 2z + 7 = 0$;
- o vértice F tem coordenadas $(3, 8, -1)$.



1.1. Determina uma equação do plano que contém a face oposta à face $[ABCD]$.

1.2. Calcula o volume do cubo, começando por determinar as coordenadas do vértice A.

2. Considera a sucessão (u_n) tal que $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$.

2.1. Verifica se $\dfrac{5}{2}$ é termo da sucessão. Em caso afirmativo, indica a respetiva ordem.

2.2. Mostra que a sucessão (u_n) é limitada, indicando um minorante e um majorante do conjunto dos seus termos.

2.3. Recorre à definição de limite de uma sucessão e mostra que $\lim u_n = 3$.

3. A Joana comprou um livro e estabeleceu um plano de leitura. O número de páginas que lê em cada dia está em progressão aritmética.
Sabe-se que:

- no 5.º dia leu 17 páginas;
- no 11.º dia leu 35 páginas;
- leu o livro em 18 dias.

Determina o número de páginas que tem o livro.

4. Considera a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 1 + 2u_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4.1. Mostra que (u_n) não é uma progressão geométrica.

4.2. Seja (v_n) a progressão geométrica em que $v_1 = \dfrac{u_3 - u_2}{2}$ e a razão é 2.

Determina a ordem do termo $32\,768$, sabendo que $2^{15} = 32\,768$.

4.3. Prova, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 2^{n+1} - 1$.

5. Calcula, caso exista:

5.1. $\lim \dfrac{(n+1)^2 - 3n}{(2n+1)^2}$

5.2. $\lim \left(\sqrt{n^2 - n} - 2n\right)$

5.3. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{3}$

5.4. $\lim(S_n)$, sendo S_n a soma dos termos da progressão geométrica (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

FIM

	Cotações																	
	1.ª Parte					2.ª Parte												
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**5.4.**
Cotações	8	8	8	8	8	12	15	10	12	12	15	12	15	12	10	10	10	15

1.ª Parte

1. Área do triângulo $[OAB]$: $\frac{1\times 2}{2}=1$

Área do triângulo $[OAP]$: $\frac{1\times \sin\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{2}$

Área do triângulo $[ABP]$: $1-\frac{\sin\theta}{2}$

Opção (B)

2. Qualquer vetor normal ao plano β é normal aos vetores $(2,-5,0)$ e $(1,-4,3)$.

Dos vetores dados o que satisfaz esta condição é $(5,2,1)$.

Pois $(5,2,1).(2,-5,0)=10-10+0=0$ e $(5,2,1).(1,-4,3)=5-8+3=0$.

Opção (C)

3. $u_5=38$ e $u_6=36+k$

Sendo (u_n) estritamente crescente, tem-se $u_5<u_6$, ou seja, $38<36+k$. Daqui resulta $k>2$.

Opção (B)

4. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{7}{2}$ e primeiro termo -2.

Termo geral: $u_n=-2+(n-1)\frac{7}{2}=\frac{7n-11}{2}$

$\frac{7n-11}{2}=250 \Leftrightarrow 7n=511 \Leftrightarrow n=73$.

A ordem do termo igual a 250 é 73.

Opção (A)

5. Se (u_n) é crescente, então u_1 é um minorante do conjunto dos seus termos.

Se todos os termos são negativos, então 0 é um majorante do conjuntos dos seus termos.

Sendo (u_n) minorada e majorada é limitada.

Opção (D)

2.ª Parte

1.1. O plano que contém a face oposta à face $[ABCD]$ passa em $F(3,8,-1)$ e é definido por uma equação do tipo $3x-y-2z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$.

$3\times3-8-2\times(-1)+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

Uma equação do plano que contém a face oposta à face $[ABCD]$ é $3x-y-2z-3=0$, $d\in\mathbb{R}$.

1.2. Como a reta AF é perpendicular ao plano $3x-y-2z+7=0$, um vetor diretor da reta AF é, por exemplo, $(3,-1,-2)$.

Uma equação vetorial da reta AF : $(x,y,z)=(3,8,-1)+k(3,-1,-2)$, $k\in\mathbb{R}$.

O ponto A pertence à reta AF , logo as coordenadas de A são do tipo $(3+3k,8-k,-1-2k)$, $k\in\mathbb{R}$.

Mas A pertence ao plano definido pela equação $3x-y-2z+7=0$. Então, tem-se:

$3(3+3k)-(8-k)-2(-1-2k)+7=0$

$3(3+3k)-(8-k)-2(-1-2k)+7=0 \Leftrightarrow k=\frac{5}{7}$

Assim, as coordenadas do vértice A são: $\left(3+\frac{15}{7},8-\frac{5}{7},-1-\frac{10}{7}\right)=\left(\frac{36}{7},\frac{51}{7},-\frac{17}{7}\right)$.

Medida da aresta do cubo: $\overline{AF}=\sqrt{\left(3-\frac{36}{7}\right)^2+\left(8-\frac{51}{7}\right)^2+\left(-1+\frac{17}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{50}{7}}$

Volume do cubo: $\left(\sqrt{\frac{50}{7}}\right)^3=\frac{50}{7}\times\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{250\sqrt{14}}{49}$

2.1. $u_n=\frac{3n-2}{n+1}$

$\frac{3n-2}{n+1}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 6n-4=5n+5\Leftrightarrow n=9$

$\frac{5}{2}$ é termo da sucessão e a ordem é 9.

2.2. $u_n=\frac{3n-2}{n+1}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n>0$. Daqui resulta que 0 é minorante do conjunto dos termos da sucessão.

Repara que, $u_n=3-\frac{5}{n+1}$

$$\begin{array}{r|l} 3n-2 & n+1 \\ \hline -3n-3 & 3 \\ -5 & \end{array}$$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n<3$. Daqui resulta que 3 é majorante do conjunto dos termos da sucessão.

Como a sucessão é minorada e majorada, conclui-se que é limitada.

2.3. $\forall \delta > 0, \quad \exists p \in \mathbb{N}: \quad n \geq p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$

$$|u_n - 3| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n-2}{n+1} - 3\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{-5}{n+1}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{n+1} < \delta$$

$$n\delta + \delta > 5 \Leftrightarrow n > \frac{5-\delta}{\delta}$$

Assim, para qualquer valor positivo de δ, basta considerar uma ordem p que seja número natural maior ou igual $\frac{5-\delta}{\delta}$. Conclui-se que $\lim u_n = 3$.

3. Seja (u_n) a progressão aritmética cujos termos são iguais ao número de páginas do livro que a Joana lê em cada um dos dias.

Sabe-se que: $u_5 = 17$ e $u_{11} = 35$.

Como $u_{11} = u_5 + (11-5)r$, sendo r a razão da progressão aritmética.

$$u_{11} = u_5 + (11-5)r \Leftrightarrow 35 = 17 + 6r \Leftrightarrow r = 3$$

Para obter o primeiro termo da progressão, basta recorrer à igualdade $u_5 = u_1 + 4r$, ou seja, $17 = u_1 + 12$. Daqui resulta que $u_1 = 5$.

Sabe-se que leu o livro em 18 dias. Então, o número de páginas do livro é igual à soma dos 18 primeiros termos da progressão.

$$S_{18} = \frac{u_1 + u_{18}}{2} \times 180 = \frac{5+56}{2} \times 18 = 549$$

O livro tem 549 páginas.

4. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 1 + 2u_n \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4.1.
$$u_1 = 3$$
$$u_2 = 1 + 2 \times 3 = 7$$
$$u_3 = 1 + 2 \times 7 = 15$$

Como $\frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{3}$ é diferente de $\frac{u_3}{u_2} = \frac{15}{7}$, conclui-se que (u_n) não é uma progressão geométrica.

4.2. $v_1 = \frac{u_3 - u_2}{2} = \frac{15-7}{2} = 4$

Como $v_n = v_1 r^{n-1}$, tem-se $v_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^2 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$.

$v_n = 32\ 768 \Leftrightarrow 2^{n+1} = 2^{15}$. Daqui resulta que $n + 1 = 15 \Leftrightarrow n = 14$.

O número 32 768 é o termo de ordem 14.

4.3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} - 1$

Se $n = 1$, tem-se $u_1 = 2^{1+1} - 1 = 3$. A condição verifica-se para $n = 1$.

Hipótese: $u_n = 2^{n+1} - 1$

Tese: $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$

Demostração:

Sabe-se que $u_{n+1} = 1 + 2u_n$. Mas, atendendo à hipótese, tem-se $u_{n+1} = 1 + 2\left(2^{n+1} - 1\right)$.

Daqui resulta que $u_{n+1} = 1 + 2^{n+2} - 2$, ou seja, $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$, tal como se queria demonstrar.

Sendo a condição dada válida para $n = 1$ e hereditária, conclui-se que é válida para todos os números naturais.

5.1. $\lim \dfrac{(n+1)^2 - 3n}{(2n+1)^2} \overset{\infty-\infty}{=} \lim \dfrac{n^2 - n + 1}{4n^2 + 4n + 1} = \lim \dfrac{n^2}{4n^2} = \dfrac{1}{4}$

5.2. $\lim\left(\sqrt{n^2 - n} - 2n\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\left[\sqrt{n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)} - 2n\right] = \lim n\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}} - 2\right) = -\infty$

5.3. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{3} = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 3n} + n\right)}{3\left(\sqrt{n^2 + 3n} + n\right)} = \lim \dfrac{n^2 + 3n - n^2}{3\left(\sqrt{n^2 + 3n} + n\right)}$

$= \lim \dfrac{3n}{3\left(\sqrt{n^2\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)} + n\right)} = \lim \dfrac{3n}{3n\left(\sqrt{1 + \dfrac{3}{n}} + 1\right)} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{3}{n}} + 1} = \dfrac{1}{2}$

5.4. A razão da progressão geométrica é $\dfrac{3}{4}$.

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = 12 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

$$\lim S_n = \lim\left(12 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right) = 12 \times (1 - 0) = 12$$

FIM