Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de Teste [outubro - 2017]

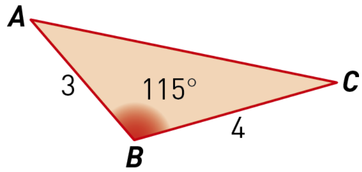
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Na figura está representado um triângulo [*ABC*].



Sabe-se que:

- $A\hat{B}C = 115°$
- $\overline{AB} = 3$
- $\overline{BC} = 4$

Qual é o valor do perímetro do triângulo arredondado às décimas?
Identifica a opção correta.

(A) 11,7 **(B)** 12,9

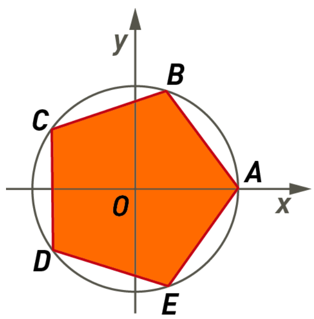
(C) 10,2 **(D)** 12,7

2. No referencial da figura está representado um pentágono regular [*ABCDE*] inscrito na circunferência trigonométrica de centro *O*.

Sabe-se que o vértice *A* tem coordenadas $(1\,,0)$.

Sejam ***a*** e ***b***, os valores arredondados às centésimas, respetivamente da abcissa e da ordenada do vértice *C*.

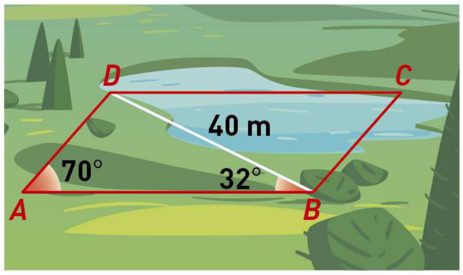
Determina o valor de $\boldsymbol{a-b}$.



3. Observa a figura em que [*ABCD*] é um paralelogramo.

Sabe-se que:

- $\overline{BD} = 40 \text{ m}$
- $B\hat{A}D = 70°$
- $D\hat{B}A = 32°$



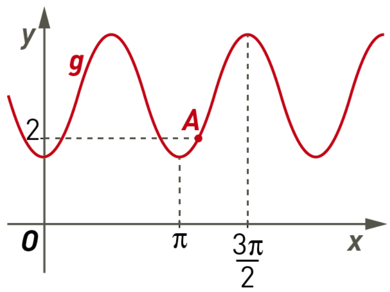
3.1. Seja *h* a altura do paralelogramo em relação ao lado [*AB*]. Determina o valor de *h*. Apresenta o resultado, em metros, arredondado às centésimas.

3.2. Determina $\overline{BC}$. Apresenta o resultado, em metros, arredondado às décimas.

Nota: No caso de efetuares arredondamentos em cálculos intermédios, mantém no mínimo três casas decimais.

4. Na figura está representada parte da função *g*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = 3 - \sqrt{2}\cos(2x)$$



4.1. Determina, na forma de intervalo de números reais, o contradomínio da função *g*.

4.2. O ponto *A* pertence ao gráfico de *g*, tem ordenada 2 e a abcissa pertence ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Qual é o valor da abcissa do ponto *A*, arredondada às centésimas?

Indica a opção correta.

(A) 3,34 **(B)** 3,47 **(C)** 3,53 **(D)** 3,28

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	
Pontos	8	20	15	15	15	12	**85**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

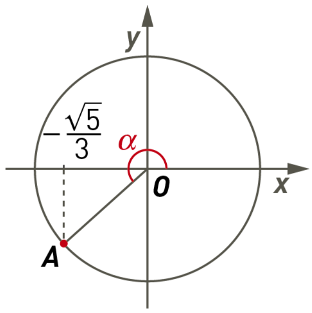
1. Mostra que: $\frac{\cos(1830°)-\sin(-405°)}{\tan(240°)} = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$

2. Determina o valor exato de $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

3. Na figura está representado na circunferência trigonométrica um ângulo de amplitude α do 3.º quadrante.

Sabe-se que a abcissa do ponto *A* é $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Qual é o valor de $\tan(\alpha)$?

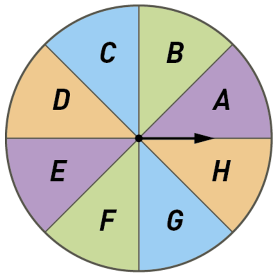


Indica a opção correta:

(A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **(B)** $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ **(D)** $-\frac{3}{\sqrt{5}}$

4. Na figura está representado um círculo dividido em oito setores de igual amplitude identificados pelas letras *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H*.



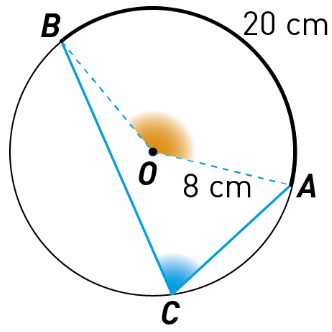
Há uma seta que que roda em torno do centro do círculo e parte da fronteira entre os setores *H* e *A*.

Determina o setor em que para a seta se descrever um ângulo de amplitude:

4.1. $-1275°$

4.2. $\frac{14\pi}{3}$ rad

5. Na figura está representada uma circunferência de centro *O* e raio 8 cm.
Os pontos *A*, *B* e *C* pertencem à circunferência e sabe-se que o arco AB tem 20 cm de comprimento.
Qual é a amplitude, em radianos, do ângulo *ACB*?
Indica a opção correta.



(A) $\frac{\pi}{2}$ rad **(B)** 1,25 rad

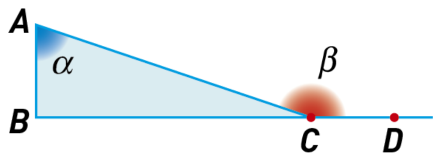
(C) $\frac{5\pi}{4}$ rad **(D)** 2,5 rad

6. Dado um ângulo α, sabe-se que $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{3}{5}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.
Determina $\tan(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)$.

7. Na figura está representado um triângulo [*ABC*] retângulo em *B*.

Sabe-se que:

- o ponto *D* pertence à reta *BC*;
- $\overline{BC} = 3 \times \overline{AB}$



Determina os valores exatos de:

7.1. $\sin \alpha$

7.2. $\cos \beta$

FIM (Caderno 2)

Cotações											
	Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**					
Pontos	8	20	15	15	15	12		**Total**			**85**
	Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**		
Pontos	15	15	8	15	15	8	15	12	12	**Total**	**115**
Total											**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio)*

Áreas de figuras planas

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. $\overline{AC}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(115°) = 25 - 24\cos(115°)$

O perímetro P, do triângulo $[ABC]$, é dado por $P = 3 + 4 + \sqrt{25 - 24\cos(115°)}$

$P \approx 12{,}92813953$

Resposta: A opção correta é a **(B) 12,9**

2. $360°:5 = 72°$

$A\hat{O}C = 2 \times 72° = 144°$

$C(\cos 144°, \sin 144°)$

$\cos 144° \approx -0{,}8090169944$ e $\sin 144° \approx 0{,}5877852523$

$a = -0{,}81$ e $b = 0{,}59$

Daqui resulta que: $a - b = -0{,}81 - 0{,}59 = -1{,}4$

Resposta: $a - b = -1{,}4$

3.

3.1. $\sin 32° = \frac{h}{40}$. Daqui resulta que $h = 40\sin 32°$.

$h \approx 21{,}19677057$

Resposta: O valor de *h* arredondado às centésimas é 21,20 m.

3.2. $\overline{BC} = \overline{AD}$

Recorrendo à lei dos senos, tem-se:

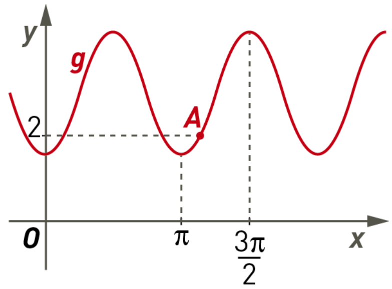
$$\frac{\sin 32°}{\overline{AD}} = \frac{\sin 70°}{40}$$

$$\overline{BC} = \overline{AD} = \frac{40\sin 32°}{\sin 70°}$$

$\overline{BC} \approx 22{,}55713209$

Resposta: O valor de $\overline{BC}$ arredondado às décimas é igual a 22,6 m.

4. $g(x) = 3 - \sqrt{2}\cos(2x)$



4.1. Atendendo às transformações de funções, tem-se:

$-1 \leq \cos(2x) \leq 1$

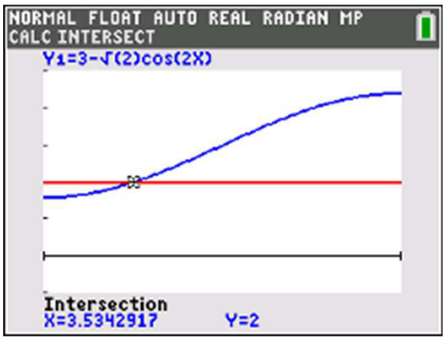
$\sqrt{2} \geq -\sqrt{2}\cos(2x) \geq -\sqrt{2}$

$3 + \sqrt{2} \geq 3 - \sqrt{2}\cos(2x) \geq 3 - \sqrt{2}$

$D'_g = \left[3 - \sqrt{2},\ 3 + \sqrt{2}\right]$

Resposta: O contradomínio da função g é $\left[3 - \sqrt{2},\ 3 + \sqrt{2}\right]$.

4.2. Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se para abcissa de *A* o seguinte valor: 3,5342917



O valor arredondado às centésimas é 3,53.

Resposta: A opção correta é **(C) 3,53**.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	**1**	**2**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	
Pontos	8	20	15	15	15	12	**85**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

1. Atendendo a que:

$1830 = 30 + 5 \times 360$;

$-405 = -45 - 1 \times 360$

e $240 = 180 + 60$,

tem-se:

$$\frac{\cos(1830°) - \sin(-405°)}{\tan(240°)} = \frac{\cos(30°) - \sin(-45°)}{\tan(60°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$$

2. $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) - 2\cos\frac{2\pi}{3} + \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

Resposta: O valor da expressão é $\frac{5}{2}$.

3. $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Sabe-se que: $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

Então, tem-se: $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{9}{5}$, ou seja, $\tan^2(\alpha) = \frac{4}{5}$.

Como α é um ângulo do 3.º quadrante, a tangente é positiva.

Então, $\tan(\alpha) = \sqrt{\frac{4}{5}}$, ou seja, $\tan(\alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Resposta: A opção correta é **(A)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4.

4.1. $360^\circ : 8 = 45^\circ$

$-1275^\circ = -195^0 - 3 \times 360^\circ$.

A seta fica sobre o setor *D*.

Resposta: Setor *D*.

4.2. $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$$

A seta fica no setor *C*.

Resposta: Setor *C*.

5. Seja $A\hat{O}B = x$ rad

16π ________ 2π

20 ________ x

$$x = \frac{20 \times 2\pi}{16\pi} = \frac{5}{2}$$

$$A\hat{C}B = \frac{x}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Resposta: A opção correta é **(B)** 1,25 rad.

6. Sabe-se que: $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{3}{5}$, ou seja, $-\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

Sendo $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, conclui-se que α é um ângulo do 2.º quadrante.

$\tan(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha) = -\tan\alpha - \cos\alpha$ **(1)**

Atendendo a que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tem-se: $\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Como α é um ângulo do 2.º quadrante, conclui-se que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Sabe-se que:

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Então, $\tan\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

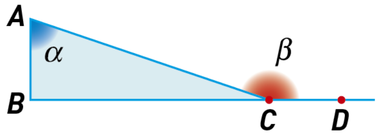
Retomando a expressão **(1)**, tem-se:

$$\tan(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha) = -\tan\alpha - \cos\alpha = -\frac{3}{4} - \frac{4}{5} = -\frac{31}{20}$$

Resposta: O valor pedido é $-\frac{31}{20}$.

7.

7.1. $\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3\times\overline{AB}}{\overline{AB}} = 3$



Sabe-se que: $1+\tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

$1+9 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$. Daqui resulta que $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{10}$.

Assim, $\sin^2(\alpha) = 1-\frac{1}{10} = \frac{9}{10}$. Com α é agudo, tem-se: $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Resposta: $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

7.2. Repara que $\beta + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$

Daqui resulta que:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Resposta: $\cos\beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

FIM (Caderno 2)

Cotações											
	Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**					
Pontos	8	20	15	15	15	12				**Total**	**85**
	Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**		
Pontos	**15**	**15**	**8**	**15**	**15**	**8**	**15**	**12**	**12**	**Total**	**115**
Total											**200**