Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

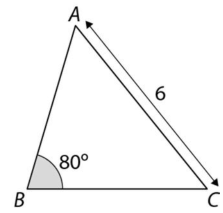
Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.



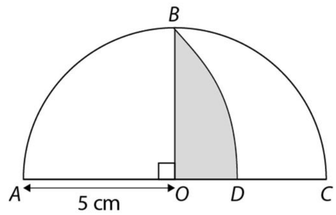
Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 6$
- $\overline{BA} = \overline{BC}$
- $A\hat{B}C = 80°$

Qual é o valor de $\overline{BC}$, arredondado às centésimas?

(A) $3{,}67$ **(B)** $4{,}17$ **(C)** $4{,}67$ **(D)** $5{,}17$

2. Na figura está representado o semicírculo ABC do círculo de centro O e raio 5 cm.

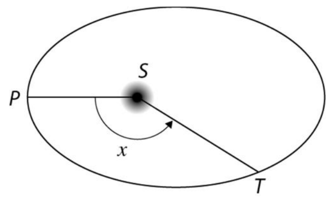


Sabe-se que $B\hat{O}A = \frac{\pi}{2}$ e BD é um arco de um círculo de centro A.

O valor da área da região a sombreado, arredondado às décimas, é:

(A) $6{,}6$ **(B)** $7{,}1$ **(C)** $7{,}6$ **(D)** $8{,}1$

3. A Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.



Na figura está representado um esquema dessa órbita, onde:

- o ponto S representa o Sol;
- o ponto T representa o planeta Terra;
- o ponto P representa o periélio, que é o ponto da órbita mais próximo do Sol;
- x é a amplitude do ângulo PST $(x \in [0, 2\pi[\,)$.

A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x, por $d(x) = 149{,}6(1 - 0{,}0167 \cos x)$.

3.1. Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função d. A amplitude A da distância d da Terra ao Sol é dada por $A = M - m$. Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos.

3.2. Seja α a amplitude do ângulo PST, num certo instante (α está compreendido entre 0 e π).

Nesse instante, o planeta Terra encontra-se a uma certa distância do Sol. Passado algum tempo, a amplitude do ângulo PST é duas vezes maior e a distância do planeta Terra ao Sol diminuiu 2%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α em radianos, arredondado às centésimas.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 2z = 4$$

4.1. Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa negativa, ordenada 3 e cota 1.

Determine uma equação do plano que é tangente à superfície esférica no ponto P.

4.2. Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOz. Determine a amplitude do ângulo AOC.

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5. Considere, num referencial o.n. Oxy, uma reta r definida pela equação $y = \sqrt{5}x - 1$.

Seja α a inclinação da reta r.

Qual é o valor de $\operatorname{sen} \alpha$?

(A) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ **(B)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **(C)** $-\frac{\sqrt{30}}{6}$ **(D)** $\frac{\sqrt{30}}{6}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	
8	8	20	20	25	20	8	**109**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

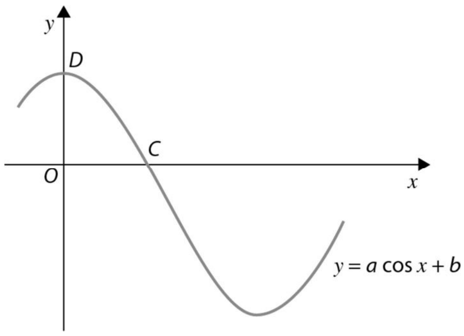
NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Na figura está representada, num referencial o.n.Oxy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = a\cos x + b\text{, para certos } a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Sejam $C(\arccos(c), 0)$ e $D(0, d)$ os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos Ox e Oy, respetivamente.

O valor de $c + d$, em função de a e b, é igual a:



(A) $a - b - \frac{a}{b}$ **(B)** $a + b - \frac{b}{a}$

(C) $a - b + \frac{a}{b}$ **(D)** $a + b + \frac{b}{a}$

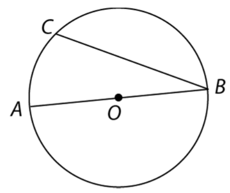
7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (1 - \cos x \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

7.1. Prove que $f(x) = \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x$.

7.2. Determine, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, 2\pi\right[$, os valores de x tais que $f(x) = \left(1 + \sqrt{27}\right)\cos^3 x$.

8. Na figura seguinte está representada uma circunferência de centro O e raio r.

Sabe-se que:



- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto C pertence à circunferência;
- 2α é a amplitude do arco BC.

Prove que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$.

9. Seja a um número real não nulo. Fixado um referencial ortonormado do espaço, considere a reta r e o plano α definidos, respetivamente, por:

$$r: (x, y, z) = (3,2,0) + k(-6, a, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$\alpha: ax + (a^2 + 2)z - 3 = 0$$

Sabe-se que a reta r é (estritamente) paralela ao plano α. Qual é o valor de a?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item					
Cotação (em pontos)					
6.	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	
8	25	25	25	8	**91**

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (C)

Como $\overline{BA} = \overline{BC}$, o triângulo [*ABC*] é isósceles. Logo, $B\hat{A}C = B\hat{C}A$.

$180° = 80° + 2B\hat{A}C$, ou seja, $\frac{180°-80°}{2} = B\hat{A}C$, isto é, $B\hat{A}C = 50°$.

Pela lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}80°}{6} = \frac{\text{sen}50°}{\overline{BC}}$$

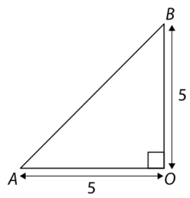
ou seja:

$$\overline{BC} = \frac{6 \times \text{sen}50°}{\text{sen}80°}$$

de onde resulta que:

$$\overline{BC} \approx 4{,}67$$

2. Opção (B)



Comecemos por determinar $\overline{AB}$:

$\overline{AB}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{50}$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = \sqrt{50}$.

Determinemos a área do setor circular de centro A e raio $\overline{AB}$:

$\frac{\pi}{4} \times \frac{(\sqrt{50})^2}{2} = \frac{50\pi}{8} = \frac{25\pi}{4}$

A área a sombreado é igual à diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo $[AOB]$:

$\frac{25\pi}{4} - \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25\pi - 50}{4} \approx 7{,}1$

3.

3.1. Sabemos que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Então:

$$-0{,}0167 \leq -0{,}0167\cos x \leq 0{,}0167$$
$$\Leftrightarrow 0{,}9833 \leq 1 - 0{,}0167\cos x \leq 1{,}0167$$
$$\Leftrightarrow 147{,}10168 \leq d \leq 152{,}09832$$

Como $d(0) = 147{,}10168$ e $d(\pi) = 152{,}09832$, então $m = 147{,}10168$ e $M = 152{,}09832$.

Assim, $A = 152{,}09832 - 147{,}10168 = 4{,}99664$.

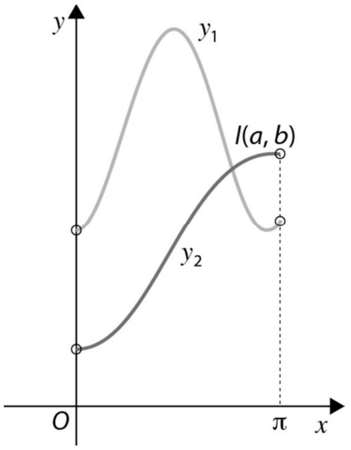
3.2. Pretendemos resolver a equação:

$$149{,}6(1-0{,}0167\cos(2x)) = 0{,}98 \times 149{,}6(1-0{,}0167\cos x), \text{ com } 0 < x < \pi$$

Usando as capacidades gráficas da calculadora:

$y_1 = 149{,}6(1-0{,}0167\cos(2x))$

$y_2 = 146{,}608(1-0{,}0167\cos x)$



$a \approx 2{,}55$

$\alpha \approx 2{,}55$ rad

4.

4.1. $x^2+2x+y^2-4y+z^2-2z=4 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4+z^2-2z+1=4+1+4+1$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=10$$

Sabemos que $P(a, 3{,}1)$, com $a<0$, pertence à superfície esférica, logo:

$(a+1)^2+(3-2)^2+(1-1)^2=10 \Leftrightarrow (a+1)^2=9$

$$\Leftrightarrow a+1=3 \quad \vee \quad a+1=-3$$

$$\Leftrightarrow a=2 \quad \vee \quad a=-4$$

Como $a<0$, então $a=-4$.

Assim, $P(-4, 3, 1)$.

Seja C o centro da superfície esférica.

Assim, as coordenadas do ponto C são $(-1, 2, 1)$.

$\overrightarrow{CP}$ é um vetor normal ao plano α, logo:

$\overrightarrow{CP}=(-4{,}3{,}1)-(-1{,}2{,}1)=(-3{,}1{,}0)$

Logo, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto P é:

$$-3(x+4)+(y-3)=0$$

que é equivalente a:

$$-3x+y-15=0$$

4.2. $C(-1,2,1)$ e $A(-1,-2,1)$

Tem-se que $A\hat{O}C = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$ e $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OC}\|}$.

Então:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) = \frac{(-1,-2,1).(-1,2,1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) = \frac{1-4+1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) = -\frac{1}{3}$$

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$, isto é, $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \approx 109{,}5°$.

5. Opção (D)

Sabemos que $\text{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

Assim:

$$1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{6}$$

e:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$$

Como $\text{tg}\alpha > 0$ e $0 \leq \alpha < \pi$, então $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Logo, $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Caderno 2

6. Opção (B)

Determinemos as coordenadas do ponto C:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a\cos x + b = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow x = \arccos\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Logo, $c = -\frac{b}{a}$.

Determinemos as coordenadas do ponto D:

$f(0) = a\cos(0) + b = a + b$

Logo, $d = a + b$.

Assim, $c + d = -\frac{b}{a} + a + b = a + b - \frac{b}{a}$.

7.

7.1. $f(x) = (1 - \cos x \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x) =$

$= \operatorname{sen} x + \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \operatorname{sen} x =$

$= \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x =$

$= \cos x (1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) =$

$= \cos x \times \cos^2 x + \operatorname{sen} x \times \operatorname{sen}^2 x =$

$= \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x$

7.2. $f(x) = (1 + \sqrt{27})\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x = (1 + \sqrt{27})\cos^3 x$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x = \left(1 + \sqrt{27}\right)\cos^3 x - \cos^3 x$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x = \sqrt{27}\cos^3 x$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{*} \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} = \sqrt{27}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x = \sqrt{27}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt[6]{3^3}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

Em $\left[-\frac{\pi}{3}, 2\pi\right[: x = \frac{\pi}{3} \ \vee \ x = \frac{4\pi}{3}$

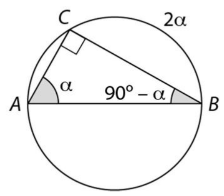
*** Nota**

Se $\cos^3 x = 0$, então $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Facilmente se verifica que estes valores não são solução da condição $\operatorname{sen}^3 x = 0$.

8. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = 2r \times \overline{BC} \times \cos(A\hat{B}C)$

Consideremos o triângulo retângulo [*ABC*]:



Como a amplitude do arco *BC* é igual a 2α, então a amplitude do ângulo inscrito $C\hat{A}B$ é igual a α.

Como o triângulo [*ABC*] é inscrito numa semicircunferência, sabemos que $A\hat{C}B = 90°$.

Dado que $C\hat{A}B = \alpha$, então $A\hat{B}C = 90° - \alpha$.

Por outro lado:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{2r} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2r\operatorname{sen}\alpha$$

Assim:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2r \times 2r\operatorname{sen}\alpha \times \cos(90° - \alpha) = 4r^2 \times \operatorname{sen}\alpha \times \operatorname{sen}\alpha =$

$= 4r^2\operatorname{sen}^2\alpha$, como queríamos demonstrar.

9. Opção (D)

$\vec{r}(-6, a, 2)$ é um vetor diretor da reta r.

$\vec{n}_\alpha(a, 0, a^2 + 2)$ é um vetor normal ao plano α.

A reta r é (estritamente) paralela ao plano α se e só se $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ são vetores perpendiculares e se o ponto de coordenadas $(3,2,0)$ (ponto da reta r) não pertence ao plano α, isto é:

$$\vec{r}.\vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow -6a + 0 + 2a^2 + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2a^2 - 6a + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow a = 2 \quad \vee \quad a = 1$$

- Se $a = 2$, então $\alpha: 2x + 6z - 3 = 0$.

  Averiguemos se r está contida em α:

  $2 \times 3 + 6 \times 0 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$, que é uma proposição falsa.

  Logo, vem que se $a = 2$, então r é (estritamente) paralela a α.

- Se $a = 1$, então $\alpha: x + 3z - 3 = 0$.

  Averiguemos se r está contida em α:

  $3 + 3 \times 0 - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, que é uma proposição verdadeira.

  Logo, vem que se $a = 1$, então r está contida em α.