

## EXAME-TIPO 12.º ANO DE ESCOLARIDADE MATEMÁTICA A

---

---

**Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.**  
É permitido o uso de calculadora.

---

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor.

Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta.

Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

---

## Formulário

### Geometria

#### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

Área de um polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

#### Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

Área lateral de um cone:  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4\pi r^2$  ( $r$  – raio)

Volume de uma pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera:  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

Progressão aritmética:  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica:  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen}a \cos b + \text{sen}b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos}a \cos b - \text{sen}a \text{sen}b$

$\frac{\text{sen} A}{a} = \frac{\text{sen} B}{b} = \frac{\text{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

### Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$  ou  $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$n\sqrt{\rho \text{cis } \theta} = n\sqrt{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$  ou  $n\sqrt{\rho e^{i\theta}} = n\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

### Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

### Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\text{sen } u)' = u' \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

### Limites notáveis

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

1.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10<sup>o</sup>, 11<sup>o</sup> e 12<sup>o</sup> anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responde apenas a um dos dois itens.

Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado.

**P2001/2002**

1.1 Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos independentes desse espaço de resultados.

Sabe-se que  $P(A) = 0,3$  e  $P(B) = 0,7$ .

Qual é o valor de  $P(A \cup B)$  ?

- (A) 1                      (B) 0,79                      (C) 0,21                      (D) 0

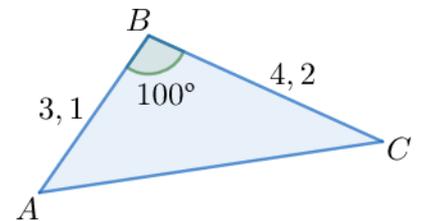
**PMC2015**

1.2 Na figura ao lado, está representado o triângulo  $[ABC]$ ,

em que  $\overline{AB} = 3,1$ ,  $\overline{BC} = 4,2$  e  $\hat{A}BC = 100^\circ$ .

Qual é o valor de  $\overline{AC}$ , arredondado às décimas?

- (A) 5,7                      (B) 5,6  
(C) 4,8                      (D) 4,7



2. Dos alunos de uma escola, sabe-se que:

- metade se desloca para a escola de autocarro;
- um quarto habita a menos de dez quilómetros da escola;
- metade dos que habitam a menos de dez quilómetros da escola desloca-se para a escola de autocarro.

Determina a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não se deslocar de autocarro para a escola e não habitar a menos de dez quilómetros da escola.

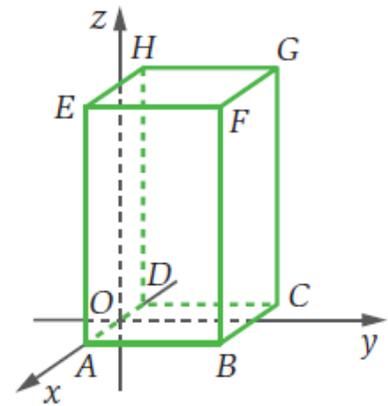
Apresenta o resultado em percentagem.

3. A soma de todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 1024.

Qual é o quinto elemento da linha seguinte?

- (A) 210                    (B) 252                    (C) 330                    (D) 462

4. Na figura ao lado, está representado, em referencial ortonormado do espaço, o prisma reto  $[ABCDEFGH]$ , de bases quadradas paralelas ao plano  $xOy$ . As coordenadas dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $G$  são, respetivamente,  $(3,0,0)$ ,  $(3,6,0)$  e  $(-3,6,12)$ .



4.1. Obtém uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta  $[AG]$ .

Apresenta essa equação na forma  $ax + by + cz + d = 0$ .

4.2. Seja  $r$  a reta de equação  $(x, y, z) = (2, 2, 2) + k(3, 4, 6)$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) e seja  $P$  o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $FBC$ .

Determina o volume da esfera com centro no ponto  $P$  e cuja superfície contém o ponto  $B$ .

Apresenta o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, utiliza valores exatos.

4.3. Escolhem-se, aleatoriamente, dois vértices do prisma.

Determina a probabilidade de esses vértices serem extremos de uma diagonal de uma face do prisma.

Apresenta o valor pedido na forma de dízima, arredondado às milésimas.

5. Considera, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, o número

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Qual é o valor, arredondado às décimas, de  $\text{Im}(z^2)$  ?

- (A) -0,8                    (B) -0,2                    (C) 0,2                    (D) 0,8

6. Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = e^x - e^{3x}$ .

6.1. Seja  $a$  um número real positivo. Qual é o valor de  $h(\ln(2a))$  ?

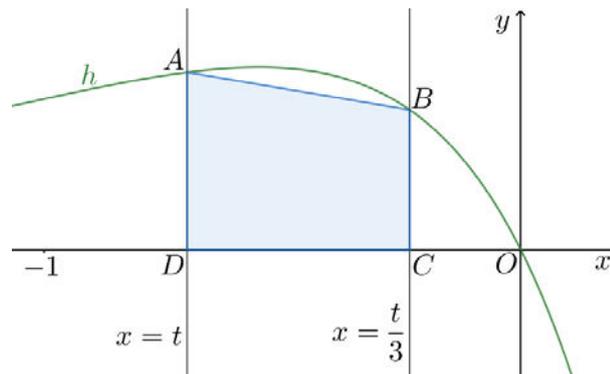
- (A)  $-4a$                       (B)  $-6a$                       (C)  $2a-6a^3$                       (D)  $2a-8a^3$

6.2. Estuda a função  $h$  quanto à monotonia e determina, caso existam, os respetivos extremos relativos.

Apresenta os valores de eventuais extremos relativos na forma  $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ .

6.3. Na figura seguinte, estão representados, em referencial ortonormado do plano:

- parte do gráfico da função  $h$  ;
- as retas verticais de equações  $x = t$  e  $x = \frac{t}{3}$ , sendo  $-1 < t < 0$  ;
- o trapézio  $[ABCD]$ , em que  $A$  e  $B$  são os pontos de interseção das retas verticais com o gráfico da função  $h$  e  $C$  e  $D$  são os pontos de interseção dessas retas com o eixo  $Ox$ .



Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de  $t$  para o qual a área do trapézio  $[ABCD]$  é igual a  $0,2$ , sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifiques a validade do resultado obtido na calculadora.

Na tua resposta:

- mostra que a área do trapézio  $[ABCD]$  é dada, em função de  $t$ , por

$$-\frac{t}{3} \left( e^{\frac{t}{3}} - e^{3t} \right);$$

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor de  $t$  arredondado às centésimas.

**FIM DO CADERNO 1**

Item	1.1.	1.2	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.	6.3.	Subtotal
<b>Cotação</b>	8		12	8	12	12	13	8	8	12	12	<b>105</b>

**EXAME-TIPO 12.º ANO DE ESCOLARIDADE  
MATEMÁTICA A**

---

**Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.**  
Não é permitido o uso de calculadora.

7.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 7.1** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10<sup>o</sup>, 11<sup>o</sup> e 12<sup>o</sup> anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 7.2** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responde apenas a um dos dois itens.

Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado.

**P2001/2002**

7.1 Considera, relativamente a um referencial ortonormado  $Oxyz$ , a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  definidos como se segue:

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = -\frac{z-1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha: x-y+z=1$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A reta  $r$  é estritamente paralela ao plano  $\alpha$ .
- (B) A reta  $r$  é concorrente e oblíqua ao plano  $\alpha$ .
- (C) A reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ .
- (D) A reta  $r$  está contida no plano  $\alpha$ .

**PMC2015**

7.2 Qual é o valor de  $\lim\left(\frac{n-3}{n}\right)^n$  ?

- (A)  $\frac{1}{e^3}$
- (B) 1
- (C)  $e^3$
- (D)  $+\infty$

8. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considera os números complexos  $z$  e  $w$  tais que:

$$z = \lambda i \quad (\text{com } \lambda \in \mathbb{R}^-) \quad \text{e} \quad w = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) \quad (\text{com } t \in ]10, 20[ )$$

Determina para que valores de  $t$  o afixo de  $z \times w$  pertence ao 1<sup>o</sup> quadrante.

9. Seja  $f$  a função, de domínio  $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2x)-1}{\sin(2x)} & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{-2x}-1}{\ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- 9.1 Averigua se a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ .
- 9.2 Estuda a função  $f$  quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico. Em caso de existência, escreve, para cada assíntota, uma equação que a defina.
- 9.3 Seja  $g$  a função, de domínio  $]-\infty, 3]$ , definida por  $g(x) = (x-3)^2$ .

Qual é o valor de  $(g^{-1} \circ f)\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ?

- (A) -1                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 4

## 10.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 10.2** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responde apenas a um dos dois itens.

Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado.

### P2001/2002

10.1 Seja  $X$  uma variável aleatória que segue uma distribuição normal de valor médio 20.

Admite que  $P(X < 22) = 0,6$ .

Qual é o valor de  $P(18 < X < 22)$  ?

- (A) 0,2                      (B) 0,4                      (C) 0,6827                      (D) 0,9545

- 10.2 Um ponto oscila, ao longo de uma reta numérica, com movimento harmónico simples dado pelo seguinte modelo:

$$x(t) = 7 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

em que  $x(t)$  é a abcissa do ponto em cada instante  $t \in [0, 3[$  (em segundos).

Qual é o número de oscilações por segundo, ou seja, a frequência, deste oscilador harmónico?

- (A)  $\frac{1}{2}$                       (B) 2                      (C)  $\frac{1}{4\pi}$                       (D)  $4\pi$

11. Sejam  $f$  uma função, de domínio  $\mathbb{R}$ , duas vezes diferenciável,  $g$  a função polinomial definida por  $g(x) = 1 - 2x$  e  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = f(x) \times g(x)$ .

Sabe-se que:

- a função  $f$  tem um extremo relativo em  $x = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) e  $f''(k) > 0$ ;
- o gráfico da função  $h$  tem um ponto de inflexão de abcissa  $k$ .

Determina o valor de  $k$ .

12. A soma dos seis primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2 é  $G$  ( $G > 0$ ).

Qual é o terceiro termo dessa progressão?

- (A)  $\frac{4G}{31}$                       (B)  $\frac{8G}{31}$                       (C)  $\frac{4G}{63}$                       (D)  $\frac{8G}{63}$

13. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sin(2x)$ .

Sabe-se que  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{f'(x) - f'(c)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , em que  $c \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ .

Determina o valor de  $c$ .

**FIM**

Item	7.1.	7.2	8.	9.1	9.2.	9.3.	10.1.	10.2.	11.	12.	13.	Subtotal
<b>Cotação</b>	8		12	13	12	8	8		13	8	13	<b>95</b>

**Total** (Caderno 1 + Caderno 2): **200** pontos

**PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO: Exame-tipo 12.º ano de escolaridade**  
**Matemática A**

---

1.1  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sendo  $A$  e  $B$  dois acontecimentos independentes, tem-se  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

Assim, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0,3 + 0,7 - 0,3 \times 0,7 = 0,79$$

Opção correta: **(B)**

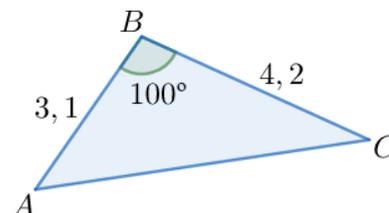
1.2 Aplicando o teorema de Carnot, tem-se:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos \hat{ABC}$$

$$\overline{AC}^2 = 3,1^2 + 4,2^2 - 2 \times 3,1 \times 4,2 \times \cos 100^\circ$$

$$\overline{AC} = \sqrt{3,1^2 + 4,2^2 - 2 \times 3,1 \times 4,2 \times \cos 100^\circ}$$

$$\overline{AC} \approx 5,6$$



Opção correta: **(B)**

2. Consideremos os seguintes acontecimentos e as respetivas probabilidades:

$A$  - aluno da escola que se desloca de autocarro

$B$  - aluno da escola que habita a menos de dez quilómetros da escola

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad P(A|B) = \frac{1}{2}$$

A probabilidade pedida é dada por  $P(\overline{A} \cap \overline{B})$  e tem-se:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$$

Substituindo os valores dados, obtém-se:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A|B) \times P(B) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Assim, a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não se deslocar de autocarro para a escola e não habitar a menos de dez quilómetros da escola é 37,5%.

3. A soma de todos os elementos da linha de ordem  $n$  do triângulo de Pascal é  $2^n$ .

Como  $2^n = 1024 \Leftrightarrow n = \log_2 1024 \Leftrightarrow n = 10$ , trata-se da linha de ordem 10.

O quinto elemento da linha seguinte é  ${}^{11}C_4 = 330$ .

Opção correta: **(C)**

4.1 Sejam  $P(x, y, z)$  um ponto genérico do plano mediador do segmento de reta  $[AG]$  e

$M$  o ponto médio de  $[AG]$ . As coordenadas de  $M$  são  $\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$ , ou

seja,  $(0, 3, 6)$ .

Os vetores  $\overline{AG}$  e  $\overline{MP}$  são perpendiculares, logo  $\overline{AG} \cdot \overline{MP} = 0$ .

$\overline{AG} = G - A$  tem coordenadas  $(-6, 6, 12)$ .

$\overline{MP} = P - M$  tem coordenadas  $(x, y - 3, z - 6)$ .

$\overline{AG} \cdot \overline{MP} = 0 \Leftrightarrow (-6, 6, 12) \cdot (x, y - 3, z - 6) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6y - 18 + 12z - 72 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - y - 2z + 15 = 0$

4.2 As coordenadas do ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $FBC$  ficam determinadas pela conjunção das condições que definem estes conjuntos de pontos.

O plano  $FBC$  define-se por  $y = 6$ .

$\begin{cases} (x, y, z) = (2, 2, 2) + k(3, 4, 6) \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, 6, z) = (2, 2, 2) + k(3, 4, 6) \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3k \\ 6 = 2 + 4k \\ z = 2 + 6k \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3k \\ k = 1 \\ z = 2 + 6k \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ k = 1 \\ z = 8 \\ y = 6 \end{cases}$

O centro da superfície esférica é  $P(5, 6, 8)$ .

O raio da superfície esférica é igual a  $\overline{PB}$ .

$\overline{PB} = \sqrt{(3-5)^2 + (6-6)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{68}$

O volume da esfera com centro no ponto  $P$  e cuja superfície contém o ponto  $B$  é igual a  $\frac{4}{3} \times \pi \times (\sqrt{68})^3$ , cujo valor arredondado às décimas é 2348,8.

4.3 O número de casos possíveis para a escolha de dois vértices do prisma é dado por  ${}^8C_2$ .

Os casos favoráveis a esses vértices serem extremos de uma diagonal de uma face do prisma é igual ao número total de diagonais das faces do prisma, ou seja,  $2 \times 6$ .

A probabilidade pedida é dada por  $\frac{2 \times 6}{{}^8C_2}$ , cujo valor arredondado às milésimas é 0,429.

5.  $z = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = e^{i\frac{\pi}{7}}$

$$z^2 = e^{i\frac{2\pi}{7}}$$

$$\overline{z^2} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{7}\right)}$$

$$\text{Im}\left(\overline{z^2}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right) \approx -0,8$$

Opção correta: **(A)**

6.1  $h(\ln(2a)) = e^{\ln(2a)} - e^{3\ln(2a)} = 2a - e^{\ln((2a)^3)} = 2a - 8a^3$

Opção correta: **(D)**

6.2  $h'(x) = (e^x - e^{3x})' = e^x - 3e^{3x}$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 3e^{3x} = 0 \Leftrightarrow e^x(1 - 3e^{2x}) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee 1 - 3e^{2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$x$	$-\infty$	$\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$+\infty$
$h'$	+	0	-
$h$		Máx. Rel.	

$h$  é crescente em  $\left] -\infty, \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right]$ .

$h$  é decrescente em  $\left[ \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), +\infty \right[$ .

$$h\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = e^{\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} - e^{3\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} - e^{\ln\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{27} = \frac{3\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$\frac{2\sqrt{3}}{9}$  é o máximo relativo de  $h$  (também absoluto).

**6.3** Os comprimentos das bases do trapézio  $[ABCD]$  são dados por

$$h(t) = e^t - e^{3t}$$

$$h\left(\frac{t}{3}\right) = e^{\frac{t}{3}} - e^{3 \times \frac{t}{3}} = e^{\frac{t}{3}} - e^t$$

A altura do trapézio  $[ABCD]$  é dado por

$$\left| t - \frac{t}{3} \right|_{-1 < t < 0} = \frac{t}{3} - t = -\frac{2t}{3}$$

A área de  $[ABCD]$  é dada, em função de  $t$ , por

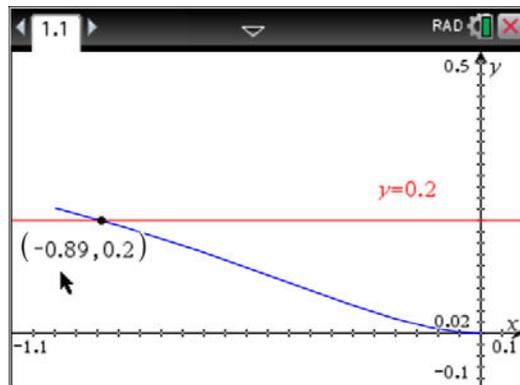
$$\frac{e^t - e^{3t} + e^{\frac{t}{3}} - e^t}{2} \times \left(-\frac{2t}{3}\right) = -\frac{t}{3} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{3t}\right).$$

O problema pode ser resolvido através da determinação da solução da equação

$$-\frac{t}{3} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{3t}\right) = 0,2, \text{ no intervalo } ]-1, 0[.$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se:

O valor de  $t$  para o qual a área do trapézio  $[ABCD]$  é igual a  $0,2$  é aproximadamente  $-0,89$ .



7.1 Um vetor diretor da reta  $r$  tem coordenadas  $(4, 2, -2)$ .

Um vetor normal ao plano  $\alpha$  tem coordenadas  $(1, -1, 1)$ .

O produto escalar destes vetores é nulo ( $4 \times 1 + 2 \times (-1) + (-2) \times 1 = 0$ ), pelo que são perpendiculares; assim, a reta  $r$  é (estritamente) paralela ao plano  $\alpha$  ou está contida nesse plano.

O ponto de coordenadas  $(1, -1, 1)$  pertence à reta, mas não pertence ao plano ( $1 - (-1) + 1 \neq 1$ ), logo a reta  $r$  é estritamente paralela ao plano  $\alpha$ .

Opção correta: **(A)**

$$7.2 \quad \lim \left( \frac{n-3}{n} \right)^n = \lim \left( 1 + \frac{-3}{n} \right)^n = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

Opção correta: **(A)**

8. Sendo  $\lambda \in \mathbb{R}^-$ , tem-se  $z = \lambda i = |\lambda|(-i) = |\lambda| e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ ; logo, o afixo de  $z \times w$  é a imagem do afixo de  $w$  pela rotação de centro na origem e amplitude  $-\frac{\pi}{2}$ , composta com a homotetia de centro na origem e razão  $|\lambda|$ .

Assim, para que o afixo de  $z \times w$  pertença ao 1º quadrante, o afixo de  $w$  tem de pertencer ao 2º quadrante, ou seja,  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{\pi}{5}t < \pi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{\pi}{5}t < \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{5}{2} + 10k < t < 5 + 10k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Como  $t \in ]10, 20[$ , resulta  $\frac{25}{2} < t < 15$ .

Por outro processo:

$$z = |\lambda| e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}, \quad w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{5}t\right)} \quad \text{e} \quad z \times w = 2|\lambda| e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}t\right)}.$$

Para que o afixo de  $z \times w$  pertença ao 1º quadrante, tem-se:

$$2k\pi < -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}t < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2k + \frac{1}{2} < \frac{1}{5}t < \frac{1}{2} + 2k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{5}{2} + 10k < t < 5 + 10k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Como  $t \in ]10, 20[$ , resulta  $\frac{25}{2} < t < 15$ .

**9.1** A função  $f$  é contínua em  $x = 0$  se tiver limite nesse ponto, ou seja, se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(2x)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin^2 x - (1 - \cos^2 x)}{2 \sin x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{\ln(x+1)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\ln(x+1)} = (*)$$

Cálculos auxiliares:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} = \lim_{y = -2x, y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\ln(x+1)} = \lim_{\substack{y = \ln(x+1) \\ x+1 = e^y \\ x = e^y - 1}} \frac{-2(e^y - 1)}{y} = -2 \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = -2 \times 1 = -2$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\ln(x+1)} = 1 \times (-2) = -2$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , a função  $f$  não tem limite em  $x = 0$  e, portanto, não é contínua nesse ponto.

**9.2** O gráfico da função  $f$  apenas pode ter uma assíntota não vertical, já que o seu domínio é apenas ilimitado à direita. Verifiquemos se, a existir, se trata de uma assíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} - 1}{\ln(x+1)} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Conclui-se que o gráfico da função  $f$  tem uma assíntota horizontal de equação  $y = 0$ .

**9.3**  $(g^{-1} \circ f)\left(-\frac{\pi}{4}\right) = g^{-1}\left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0 - 1}{-1} = 1$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = (x-3)^2 \underset{x \in ]-\infty, 3]}{\Leftrightarrow} -\sqrt{y} = x-3 \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{y}$$

$$g^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x}$$

$$(g^{-1} \circ f)\left(-\frac{\pi}{4}\right) = g^{-1}\left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = g^{-1}(1) = 3 - \sqrt{1} = 2$$

(Em alternativa, pode ser resolvida a equação  $g(x) = 1$ , em  $]-\infty, 3]$ .)

Opção correta: **(C)**

10.1 Se  $P(X < 22) = 0,6$ , então  $P(X > 22) = 0,4$  e, também,  $P(X < 18) = 0,4$  (tendo em conta que  $X$  é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal de valor médio 20).

Assim, tem-se:

$$P(18 < X < 22) = 1 - P(X > 22) - P(X < 18) = 1 - 2 \times 0,4 = 0,2$$

Opção correta: **(A)**

10.2 O período deste oscilador harmónico é  $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ ; logo, a frequência, sendo dada

por  $f = \frac{1}{T}$ , é 2.

Opção correta: **(B)**

11. Como  $f$  tem um extremo relativo em  $x = k$  e admite derivada no seu domínio, tem-se  $f'(k) = 0$ .

Como o gráfico da função  $h$  tem um ponto de inflexão de abcissa  $k$  e é duas vezes diferenciável em  $\mathbb{R}$  (produto de duas funções duas vezes diferenciável em  $\mathbb{R}$ ), tem-se  $h''(k) = 0$ .

Sabe-se ainda que  $f''(k) > 0$ .

Determinemos a segunda derivada de  $h$ :

$$h'(x) = (f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) = f'(x) \times (1 - 2x) - 2f(x)$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= (f'(x) \times (1 - 2x) - 2f(x))' = f''(x) \times (1 - 2x) - 2f'(x) - 2f'(x) = \\ &= f''(x) \times (1 - 2x) - 4f'(x) \end{aligned}$$

A conjugação destas informações, permite-nos obter o valor de  $k$ :

$$h''(k) = 0 \Leftrightarrow f''(k) \times (1 - 2k) - 4f'(k) = 0 \Leftrightarrow f''(k) \times (1 - 2k) - 4 \times 0 = 0$$

Como  $f''(k) > 0$ , obtém-se:

$$f''(k) \times (1 - 2k) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

12. A soma dos seis primeiros termos de uma progressão geométrica, de primeiro termo

$$u_1 \text{ e razão } 2, \text{ é dada por } u_1 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2}.$$

Assim, tem-se:

$$u_1 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = G \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1 - 64}{-1} = G \Leftrightarrow u_1 = \frac{G}{63}.$$

$$\text{O terceiro termo da progressão é dado por } u_3 = u_1 \times 2^2 = \frac{G}{63} \times 4 = \frac{4G}{63}.$$

Opção correta: **(C)**

$$13. \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{f'(x) - f'(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}} = \frac{f'(c)}{f''(c)}$$

$$f'(x) = (\sin(2x))' = 2 \cos(2x)$$

$$f''(x) = (2 \cos(2x))' = -4 \sin(2x)$$

$$\frac{f'(c)}{f''(c)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{2 \cos(2c)}{-4 \sin(2c)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{-2 \tan(2c)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \tan(2c) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como  $c \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ , tem-se  $2c \in ]\pi, 2\pi[$  e:

$$\tan(2c) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2c = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2c = \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow c = \frac{11\pi}{12}$$

**FIM**