Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n.u^{n-1}.u' \ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a} \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \ (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \ (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos em E.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis;
- $P(A|B) = P(A)$;
- $P(A \cup B) = 0{,}84$.

Qual é o valor de $P(A \cap B)$?

(A) $0{,}25$ **(B)** $0{,}36$ **(C)** $0{,}49$ **(D)** $0{,}64$

2. A Margarida convidou os amigos para um lanche em sua casa.

2.1. A Margarida tem oito bombons de chocolate negro, iguais entre si, e oito bombons de chocolate branco, todos com formatos distintos. A Margarida vai colocar aleatoriamente os 16 bombons numa caixa quadrada com 16 compartimentos, não mais do que um por compartimento. Determine a probabilidade de os chocolates brancos ocuparem duas colunas. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Um prato contém sete *cupcakes*, cada um com uma cobertura diferente, cinco *brownies*, cada um de tamanho diferente e três *donuts*, também cada um com uma cobertura diferente.

De quantas maneiras distintas se podem colocar os 15 doces em fila de tal forma que os doces do mesmo tipo fiquem juntos.

2.3. Um outro prato contém 12 bolos miniaturas, dos quais cinco são natas, quatro são *éclairs* e três são bolas de berlim. A Margarida vai distribuir aleatoriamente todas as miniaturas pelos amigos Afonso e Gonçalo.

Sejam A, B e C os acontecimentos seguintes:

A: "O Afonso recebe sete miniaturas."

B: "O Gonçalo recebe pelo menos um bolo de cada tipo."

C: "O Afonso e o Gonçalo recebem, cada um, um número ímpar de miniaturas."

Elabore uma composição na qual indique o valor de $P(A \cap B|C)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta, deve:

- explicar o significado de $P(A \cap B|C)$, no contexto da situação descrita;
- fazer referência à regra de Laplace;
- explicar o número de casos possíveis;
- explicar o número de casos favoráveis;
- apresentar o valor de $P(A \cap B|C)$ na forma de fração irredutível.

3. Considere o desenvolvimento de $(1+ax)(2-3x)^5$, com $a \in \mathbb{R}$.

Sabendo que o coeficiente do termo em x^2 é igual a 600, determine o valor da constante a.

4. Uma associação desportiva dedica-se ao *karaté* e ao *jiu-jitsu*, entre outras artes marciais.

Nesta associação, sabe-se que:

- o número de praticantes de *karaté* é o dobro do número de praticantes de *jiu-jitsu*;
- o número de praticantes de pelo menos uma das duas modalidades é o triplo do número de praticantes das duas modalidades.

Escolhendo, ao acaso, um membro dessa associação praticante de *karaté*, determine a probabilidade de este ser praticante de *jiu-jitsu*.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

5. A expressão ${}^{2019}C_{2000} - {}^{2018}C_{1999}$ é igual a:

(A) ${}^{2019}C_{1999}$ **(B)** ${}^{2019}C_{18}$ **(C)** ${}^{2018}C_{1999}$ **(D)** ${}^{2018}C_{18}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.**	**5.**	
8	15	15	15	20	20	8	**101**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Sejam E um conjunto finito, não vazio, P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos em E tais que $P(A) \neq 0$.

Prove que $P(\bar{A} \cup B) + P(\bar{B}|A) - P(\bar{A}) \times P(\bar{B}|A) = 1$.

7. Qual é o valor de $\sum_{k=1}^{2019} {}^{2019}C_k \ (-1)^{2019-k} 2^k$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

8. Dispõe-se de catorze carateres (a saber: os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de cinco carateres, dos quais três têm de ser algarismos e dois têm de ser vogais. Quantos códigos diferentes é possível formar tais que haja unicamente dois algarismos iguais a 9?

(A) $3 \times {}^5A'_2 \times 8 \times 5!$

(B) ${}^5A_2 \times 3 \times {}^5A'_2 \times 8$

(C) ${}^5C_2 \times 3! \times {}^5A'_2 \times 8$

(D) ${}^5C_2 \times 3 \times {}^5A'_2 \times 8$

9. Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{n - \text{sen}(n\pi)}{n^2+n+1}$.

10. Considere dois dados cúbicos, um regular, com as faces marcadas de 1 a 6 pontos, e outro com todas as faces marcadas com 4 pontos. Um dos dados é escolhido ao acaso e lançado uma vez. Qual é a probabilidade de ficar voltada para cima uma face marcada com 4 pontos?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{7}{12}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

11. Mostre, por indução matemática, que, para todo o número natural n, se tem:

$$\sum_{k=0}^{n} {}^{k+3}C_k = {}^{n+4}C_n$$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item						
Cotação (em pontos)						
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	
25	8	8	25	8	25	**99**

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

Sabemos que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis, isto é, $P(A) = P(B)$;
- $P(A|B) = P(A)$ ou seja, $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

então:

0,84 = $P(A) + P(A) - P(A) \times P(A) \Leftrightarrow (P(A))^2 - 2P(A) + 0{,}84 = 0$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 0{,}84}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}6 \quad \vee \quad P(A) = 1{,}4$$

Como $0 \leq P(A) \leq 1$, então $P(A) = 0{,}6$. Logo, $P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

2.

2.1. ${}^{16}C_8$ é o número de maneiras distintas de escolher os oito compartimentos de entre os 16 onde vão ser colocados os bombons de chocolate negro (iguais entre si). Por cada uma destas maneiras, existem 8! maneiras de colocar ordenadamente e sem repetição os 8 bombons de chocolate branco (distintos entre si) nos oito compartimentos restantes. Assim, ${}^{16}C_8 \times 8!$ é o número de casos possíveis.

${}^{4}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher as duas colunas de entre as quatro que vão ser ocupadas. Por cada uma destas maneiras, existem 8! maneiras de colocar os 8 bombons de chocolate branco (distintos entre si) nos oito compartimentos definidos pela escolha das duas colunas. Assim, ${}^{4}C_2 \times 8!$ é o número de casos favoráveis.

A probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{4}C_2 \times 8!}{{}^{16}C_8 \times 8!} = \frac{1}{2145}$.

2.2. 7! é o número de maneiras distintas de permutar os sete *cupcakes* (distintos) entre si.

5! é o número de maneiras distintas de permutar os cinco *brownies* (distintos) entre si.

3! é o número de maneiras distintas de permutar os três *donuts* (distintos) entre si.

3! é o número de maneiras distintas de permutar os três tipos de doce (*cupcakes, brownies* e *donuts*) entre si.

Assim, 7! × 5! × 3! × 3! = 21 772 800 é o número de maneiras pedidas.

2.3. $P((A \cap B)|C)$ representa, no contexto do problema, a probabilidade de o Afonso receber sete miniaturas e de o Gonçalo receber um bolo de cada tipo, sabendo que os amigos Afonso e Gonçalo recebem, cada um, um número ímpar de miniaturas.

Ora, admitindo que os amigos Afonso e Gonçalo recebem, cada um, um número ímpar de miniaturas, existem seis hipóteses mutuamente exclusivas: o Afonso recebe ou 1, ou 3, ou 5, ou 7, ou 9, ou 11 miniaturas, isto é, ${}^{12}C_1 + {}^{12}C_3 + {}^{12}C_5 + {}^{12}C_7 + {}^{12}C_9 + {}^{12}C_{11}$, que é igual a 2048 casos possíveis.

Destes 2048 casos, pretendemos determinar o número de casos em que o Afonso recebe sete miniaturas e o Gonçalo recebe pelo menos uma nata, um *éclair* e uma bola de berlim, isto é, o Gonçalo recebe cinco miniaturas, podendo ser:

- ou três natas, um *éclair* e uma bola de Berlim, ${}^{5}C_3 \times 4 \times 3$;
- ou uma nata, três *éclairs* e uma bola de Berlim, $5 \times {}^{4}C_3 \times 3$;
- ou uma nata, um *éclair* e três bolas de Berlim, $5 \times 4 \times {}^{3}C_3$;
- ou duas natas, dois *éclairs* e uma bola de Berlim, ${}^{5}C_2 \times {}^{4}C_2 \times 3$;
- ou duas natas, um *éclair* e duas bolas de Berlim, ${}^{5}C_2 \times 4 \times {}^{3}C_2$;
- ou uma nata, dois *éclairs* e duas bolas de Berlim, $5 \times {}^{4}C_2 \times {}^{3}C_2$.

Temos, assim, ${}^{5}C_3 \times 4 \times 3 + 5 \times {}^{4}C_3 \times 3 + 5 \times 4 \times {}^{3}C_3 + {}^{5}C_2 \times {}^{4}C_2 \times 3 + {}^{5}C_2 \times 4 \times {}^{3}C_2 + 5 \times {}^{4}C_2 \times {}^{3}C_2 = 590$ casos possíveis.

Assim, tem-se que $P(A \cap B|C) = \frac{590}{2048} = \frac{295}{1024}$.

3. O termo geral do desenvolvimento de $(2 - 3x)^5$ é dado por:

${}^{5}C_k 2^{5-k} \times (-3x)^k = {}^{5}C_k \times 2^{5-k} \times (-3)^k \times x^k, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Tem-se que:

$(1 + ax) \times {}^{5}C_k \times 2^{5-k} \times (-3)^k \times x^k = {}^{5}C_k \times 2^{5-k} \times (-3)^k \times x^k + a \times {}^{5}C_k \times 2^{5-k} \times (-3)^k \times x^{k+1}$

- Se $k = 2$, obtemos o termo ${}^{5}C_2 \times 2^{5-2} \times (-3)^2 \times x^2 = 10 \times 8 \times 9x^2 = 720x^2$.
- Se $k = 1$, obtemos o termo $a \times {}^{5}C_1 \times 2^{5-1} \times (-3) \times x^2 = a \times 5 \times 16 \times (-3)x^2 = -240ax^2$.

Sabemos que:

$$720 - 240a = 600$$

ou seja:

$720 - 600 = 240a \Leftrightarrow 120 = 240a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

4. Consideremos os acontecimentos:

K: "Ser praticante de *karaté*."

J: "Ser praticante de *jiu-jitsu*."

Sabemos que:

- $P(K) = 2P(J)$
- $P(K \cup J) = 3P(K \cap J)$

Pretende-se determinar $P(J|K)$.

Como $P(K \cup J) = 3P(K \cap J)$, tem-se que:

$$P(K) + P(J) - P(K \cap J) = 3P(K \cap J)$$

Como $P(K) = 2P(J)$, vem que:

$$2P(J) + P(J) - P(K \cap J) = 3P(K \cap J)$$

Assim:

$$3P(J) = 4P(K \cap J)$$

ou seja:

$$P(K \cap J) = \frac{3}{4}P(J)$$

Logo:

$$P(J|K) = \frac{P(J \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{3}{4}P(J)}{2P(J)} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

A probabilidade pedida é 37,5%.

5. Opção (D)

Seja $a = {}^{2019}C_{2000} - {}^{2018}C_{1999}$.

Então, $a + {}^{2018}C_{1999} = {}^{2019}C_{2000}$.

Logo, $a = {}^{2018}C_{2000}$ ou $a = {}^{2018}C_{18}$.

Caderno 2

6. $P(\bar{A} \cup B) + P(\bar{B}|A) - P(\bar{A}) \times P(\bar{B}|A) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{B}|A) \times \left(1 - P(\bar{A})\right) =$

$$= 1 - P(A) + P(B) - \left(P(B) - P(A \cap B)\right) + \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} \times P(A) =$$

$$= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) + P(\bar{B} \cap A) =$$

$$= 1 - P(A) + P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= 1$$

7. Opção (D)

Sabe-se, pelo desenvolvimento do binómio de Newton, que:

$$\sum_{k=0}^{2019} {}^{2019}C_k\ (-1)^{2019-k}2^k = (-1+2)^{2019}$$

Assim:

$${}^{2019}C_0\ \times (-1)^{2019-0} \times 2^0 + \sum_{k=1}^{2019} {}^{2019}C_k\ (-1)^{2019-k}2^k = 1^{2019}$$

$$\Leftrightarrow 1 \times (-1) \times 1 + \sum_{k=1}^{2019} {}^{2019}C_k\ (-1)^{2019-k}2^k = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2019} {}^{2019}C_k\ (-1)^{2019-k}2^k = 2$$

8. Opção (D)

Existem ${}^5C_2$ maneiras diferentes de escolher duas posições de entre as cinco para o algarismo 9. Para cada uma destas maneiras, existem oito maneiras de escolher um algarismo diferente de 9 e que pode ocupar uma das três posições disponíveis. Finalmente, e por cada uma das maneiras anteriores, existem ${}^5A'_2$ formas de escolher ordenadamente e com repetição duas das cinco vogais existentes para ocupar os dois lugares restantes.

É possível, então, formar ${}^5C_2 \times 8 \times 3 \times {}^5A'_2 = {}^5C_2 \times 3 \times {}^5A'_2 \times 8$ códigos diferentes.

9. Tem-se que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(n\pi) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -1 \leq -\operatorname{sen}(n\pi) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq n - \operatorname{sen}(n\pi) \leq n+1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2+n+1} \leq \frac{n-\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2+n+1} \leq \frac{n+1}{n^2+n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Lim}\,\frac{n-1}{n^2+n+1} = \lim \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(n+1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1-\frac{1}{n}}{n+1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Lim}\,\frac{n+1}{n^2+n+1} = \lim \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(n+1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{n+1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, pelo teorema das sucessões enquadradas, concluímos que $\lim \frac{n-\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2+n+1} = 0$.

10. Opção (C)

Consideremos os acontecimentos:

D: "Ser dado regular com as faces numeradas de 1 a 6."

V: "Ser dado com todas as faces numeradas com quatro pontos."

Q: "Sair face marcada com quatro pontos."

Então, a probabilidade pedida é $P(D \cap Q) + P(V \cap Q)$.

Assim:

$$P(D \cap Q) + P(V \cap Q) = P(D) \times P(Q|D) + P(V) \times P(Q|V) =$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{7}{12}$$

11. $P(n): \sum_{k=0}^{n} {}^{k+3}C_k = {}^{n+4}C_n$

i) $P(1)$ é verdadeira

$$\sum_{k=0}^{1} {}^{k+3}C_k = {}^{1+4}C_1 \Leftrightarrow {}^{3}C_0 + {}^{4}C_1 = {}^{5}C_1$$
$$\Leftrightarrow 1 + 4 = 5$$
$$\Leftrightarrow 5 = 5, \text{ o que é verdadeiro.}$$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): \sum_{k=0}^{n} {}^{k+3}C_k = {}^{n+4}C_n$ (hipótese de indução)

$P(n+1): \sum_{k=0}^{n+1} {}^{k+3}C_k = {}^{n+5}C_{n+1}$

$${}^{n+5}C_{n+1} = {}^{n+4}C_{n+1} + {}^{n+4}C_n =$$
$$\underbrace{=}_{\text{Hipótese de indução}} {}^{n+4}C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} {}^{k+3}C_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} {}^{k+3}C_k$$

Por i) e ii), pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} {}^{k+3}C_k = {}^{n+4}C_n$.