Teste de Matemática A

2019 / 2020

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0,\ldots,n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu,\sigma)$, então:

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes (espadas, copas, ouros e paus).

Em cada naipe há 13 cartas: um ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do dois ao dez).

1.1. Utilizando apenas as doze figuras, quantas sequências de 12 cartas, com as figuras do mesmo naipe todas juntas, é possível construir?

1.2. Retirando ao acaso, simultaneamente, cinco cartas de um baralho completo, de quantas maneiras é possível obter pelo menos dois ases?

1.3. Considere apenas as nove cartas, do dois ao dez, do naipe de ouros.

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, seis dessas cartas.

Determine a probabilidade de o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 9.

Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

2. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, dois algarismos 4, três algarismos 5 e um algarismo 7.

Determine quantos destes números são pares.

3. A soma dos três últimos elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 191.

O terceiro elemento da linha seguinte é:

(A) 189 **(B)** 190 **(C)** 191 **(D)** 192

4. Considere o desenvolvimento de $(2 - kx)^5$, com $k \in \mathbb{R}$.

Sabendo que o coeficiente do termo em x^3 é igual a -1080, determine o valor da constante k.

5. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos equiprováveis e independentes.

Sabe-se que $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{9}{8}$.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	
15	15	15	15	8	20	8	96

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Considere n pontos pertencentes a uma circunferência $(n \geq 3)$.

O número de polígonos convexos que podem ser definidos por esses pontos é dado por:

(A) 2^n **(B)** $2^n - 1$ **(C)** $2^n - 1 - n$ **(D)** $2^n - 1 - n - \frac{n^2-n}{2}$

7. Pretende-se pintar um painel publicitário com n listas verticais coloridas, utilizando-se para o efeito p cores. Sabendo que listas consecutivas não podem ter a mesma cor, de quantas maneiras diferentes se pode pintar o painel para todos os casos possíveis de n e p?

(A) $(n-1)^{p-1}$ **(B)** $p \times (p-1)^{n-1}$ **(C)** ${}^{n}A'_{p}$ **(D)** ${}^{p}A'_{n}$

8. Considere o seguinte problema:

O departamento de Matemática de uma determinada escola tem quinze professores e pretende formar uma comissão de quatro professores para representar a escola num congresso internacional. O António e a Susana, que são casados, combinaram que não fariam parte da comissão juntos. Quantas são as comissões diferentes que se podem constituir nestas condições?

${}^{15}C_4 - {}^{13}C_2$ e ${}^{13}C_4 + 2 \times {}^{13}C_3$ são duas respostas corretas.

Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduziu a cada uma das respostas.

9. Determine o valor natural n que satisfaz a igualdade:

$$\frac{(n+1)! - {}^{n}A_n}{(n-1)!} = 2019\ {}^{n}C_{n-1}$$

10. O Pedro, o Salvador e o Tiago juntaram-se com alguns amigos num convívio. Se n for o número de pessoas no convívio $(n > 3)$, de quantas maneiras se podem dispor lado a lado em linha reta os n amigos, se os três amigos, Pedro, Salvador e Tiago, não ficarem em lugares consecutivos?

(A) $3! \times (n-3)!$ **(B)** $3 \times (n-2)!$

(C) $(n-3)! \times (n^3 - 3n^2 - 4n)$ **(D)** $(n-2)! \times (n^2 - n - 6)$

11. Sejam E um conjunto finito, não vazio, e P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$. Sejam A e B dois acontecimentos em E tais que $P(B) \neq 0$.

Prove que:

$$P(\overline{A}) - P(\overline{A \cup B}) - P(B) \times \left[1 - P\left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) | \, B\right)\right] = 0$$

12. Na turma do João, alguns alunos pretendem candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada.

Relativamente a essa turma, constatou-se que:

- o número de rapazes é o dobro do número de alunos que pretende candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada;
- dois terços dos alunos que pretendem candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada são rapazes;
- cinco em cada seis alunas não pretendem seguir o curso de Matemática Aplicada.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno da turma.

Determine a probabilidade de esse aluno pretender candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	
8	8	20	20	8	20	20	**104**

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. $\underbrace{\_C\_\ \_P\_\ \_E\_\ \_O\_}$

$3! \times 3! \times 3! \times 3! \times 4! = 31\,104$

- 3! é o número de maneiras distintas de as três figuras do naipe de copas permutarem entre si;
- 3! é o número de maneiras distintas de as três figuras do naipe de paus permutarem entre si;
- 3! é o número de maneiras distintas de as três figuras do naipe de espadas permutarem entre si;
- 3! é o número de maneiras distintas de as três figuras do naipe de ouros permutarem entre si;
- 4! é o número de maneiras distintas de os quatro blocos (copas, paus, espadas e ouros) permutarem entre si.

1.2. $\underbrace{{}^4C_2 \times {}^{48}C_3}_{\substack{\text{retirar exatamente} \\ \text{2 ases}}} + \underbrace{{}^4C_3 \times {}^{48}C_2}_{\substack{\text{retirar exatamente} \\ \text{3 ases}}} + \underbrace{{}^4C_4 \times {}^{48}C_1}_{\substack{\text{retirar exatamente} \\ \text{4 ases}}} = 108\,336$

1.3. Número de casos possíveis: ${}^9C_6$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{1}_{\substack{\text{escolher a} \\ \text{carta com "3"}}} \times \underbrace{1}_{\substack{\text{escolher a} \\ \text{carta com "9"}}} \times \underbrace{{}^5C_4}_{\substack{\text{número de maneiras de escolher 4 cartas} \\ \text{de entre as 5 cartas com o 4,5,6,7 e 8}}}$

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^5C_4}{{}^9C_6} = \frac{5}{84}$.

2. Pretendemos determinar todos os números naturais pares de sete algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, dois algarismos 4, três algarismos 5 e um algarismo 7.

Existem dois casos mutuamente exclusivos: ou terminam em 0 ou terminam em 4.

__ __ __ __ __ __ _0_ ou __ __ __ __ __ __ _4_

${}^6C_2 \times {}^4C_3 + 5 \times 5 \times {}^4C_3 = 160$

- No caso de o número terminar em 0, existem ${}^6C_2$ maneiras distintas de escolher as posições dos dois algarismos 4 e, por cada uma destas maneiras, existem ${}^4C_3$ maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 5. Para cada uma destas maneiras, só existe uma posição para colocar o algarismo 7.
- No caso de o número terminar em 4, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do 0 (não pode ocupar a posição da unidade do milhão) e, por cada uma destas maneiras, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do algarismo 4 restante. Para cada uma destas

maneiras, existem ${}^{4}C_3$ maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 5. Feito isto, o algarismo 7 só tem uma maneira de ser colocado.

3. **Opção (B)**

Sabemos que os três últimos elementos de qualquer linha do triângulo de Pascal são iguais aos três primeiros elementos dessa mesma linha.

Assim:

$$1 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 191$$

Logo:

$${}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 190$$

Ou seja:

$${}^{n+1}C_2 = 190$$

Isto é, o terceiro elemento da linha seguinte é 190.

4. O termo geral do desenvolvimento de $(2 - kx)^5$, com $k \in \mathbb{R}$ é:

$${}^{5}C_p\ 2^{5-p} \times (-kx)^p = {}^{5}C_p\ 2^{5-p} \times (-1)^p \times k^p \times x^p$$

O coeficiente de x^3 é:

$${}^{5}C_3\ 2^2 \times (-1)^3 \times k^3$$

Logo, vem que:

${}^{5}C_3 \times 4 \times (-1) \times k^3 = -1080 \Leftrightarrow k^3 = 27 \Leftrightarrow k = 3$

5. **Opção (A)**

Sabemos que $P(A) = P(B)$ e que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Assim:

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \frac{9}{8} \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) + P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) + 1 - P(A \cap B) = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(A) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(A) - 2\left(P(A)\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow -16\left(P(A)\right)^2 + 8P(A) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times (-16) \times (-1)}}{-32}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

Caderno 2

6. **Opção (D)**

O número de polígonos convexos é dado pelo número de subconjuntos com mais do que dois elementos escolhidos de entre os n pontos.

Se ao número total de subconjuntos do conjunto dos n pontos retirarmos o conjunto vazio, o número dos subconjuntos com um só elemento e o número dos subconjuntos com dois elementos, ficamos com o número pretendido:

$$2^n - 1 - n - {}^nC_2 = 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= 2^n - 1 - n - \frac{n^2-n}{2}$$

7. **Opção (B)**

$$\underbrace{\underline{p} \times \underline{(p-1)} \times \underline{(p-1)} \times \overline{\ldots} \times \underline{(p-1)}}_{n \text{ listas}} = p \times (p-1)^{n-1}$$

Para a primeira lista, existem p cores disponíveis e, portanto, p maneiras de a colorir. Por cada uma destas maneiras, existem $(p-1)$ maneiras de pintar a segunda lista, uma vez que a cor utilizada anteriormente não pode ser agora usada para pintar a segunda lista.

Por cada uma destas formas, existem também $(p-1)$ maneiras de pintar a terceira lista, já que só não pode ser utilizada a que foi usada para pintar a lista imediatamente anterior, e assim sucessivamente até perfazer as listas restantes.

8. Por um lado, ${}^{15}C_4 - {}^{13}C_2$ é uma resposta correta ao problema, pois ${}^{15}C_4$ é o número de comissões que se podem formar escolhendo 4 dos 15 professores sem qualquer restrição. Se a este número total de possibilidades retirarmos o número de comissões em que ambos os elementos do casal estão presentes (o que pode ser feito de ${}^{13}C_2$ maneiras diferentes, já que o António e a Susana fazem parte e basta escolher 2 dos restantes 13 professores para completar a comissão), obtemos então o número de comissões em que o António e a Susana não se encontram juntos.

Por outro lado, ${}^{13}C_4 + 2 \times {}^{13}C_3$ é também uma resposta correta ao problema, uma vez que existem duas possibilidades mutuamente exclusivas de formar uma comissão de 4 professores sem o António e a Susana juntos: ou o António e a Susana não pertencem ambos à comissão ou pertence apenas um deles à comissão.

No primeiro caso, existem ${}^{13}C_4$ maneiras de formar a comissão, já que corresponde ao número de maneiras de escolher 4 dos 13 professores, donde se excluíram os elementos do casal.

No segundo caso, existem 2 maneiras de escolher apenas um dos dois elementos do casal, sendo que, para cada uma destas maneiras, existem ${}^{13}C_3$ formas de escolher os restantes três elementos de entre os 13 professores, de onde se excluíram o António e a Susana, havendo, então, $2 \times {}^{13}C_3$ comissões em que apenas está presente um elemento do casal.

9. $\frac{(n+1)!-{}^{n}A_n}{(n-1)!} = 2019 \times {}^{n}C_{n-1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!} = 2019 \times {}^{n}C_1$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)\times n\times(n-1)!-n\times(n-1)!}{(n-1)!} = 2019 \times n$

$\Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)!((n+1)-1)}{(n-1)!} = 2019n$

$\Leftrightarrow n \times n = 2019n$

$\Leftrightarrow n = 2019 \quad (n \neq 0)$

10. Opção (D)

$n!$ é o número de maneiras de dispor lado a lado, em linha reta, n amigos, sem restrições;

Existem 3! maneiras diferentes de dispor o Pedro, o Salvador e o Tiago, dados três lugares consecutivos. Existem $n-2$ escolhas possíveis de três lugares consecutivos. Finalmente, ocupados esses três lugares consecutivos, há $(n-3)!$ formas de dispor as restantes pessoas nos lugares que sobram.

Portanto, $3!(n-2)(n-3)! = 3!(n-2)!$ é o número de maneiras de dispor lado a lado, em linha, os n amigos, com o Pedro, o Salvador e o Tiago em lugares consecutivos.

O número pedido é, então, dado por:

$n! - 3!(n-2)! = n(n-1)(n-2)! - 6(n-2)! =$

$= (n-2)!(n^2-n-6)$

11. $P(\overline{A}) - P(\overline{A \cup B}) - P(B) \times \left[1 - P\left((\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})|B\right)\right] =$

$= 1 - P(A) - P(\overline{A \cup B}) - P(B) \times [1 - P((A \cap B)|B)] =$

$= 1 - P(\overline{A \cup B}) - P(A) - P(B)\left[1 - \frac{P(A \cap B \cap B)}{P(B)}\right] =$

$= P(A \cup B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

$= P(A \cup B) - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$= P(A \cup B) - P(A \cup B) =$

$= 0$

12. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: “ser rapaz”

B: “pretender candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada”

Sabemos que:

- $P(A) = 2P(B)$
- $P(A|B) = \frac{2}{3}$
- $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{5}{6}$

Então:

$P(A|B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(B)$

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - 2P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-P(A)-P(B)+P(A \cap B)}{1-2P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2P(B)-P(B)+\frac{2}{3}P(B)}{1-2P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\frac{7}{3}P(B)}{1-2P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6\left(1 - \frac{7}{3}P(B)\right) = 5(1 - 2P(B))$$

$$\Leftrightarrow 6 - 14P(B) = 5 - 10P(B)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

A probabilidade de um aluno escolhido ao acaso pretender candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada é $\frac{1}{4}$.