

7. Considera a função f , de domínio $]3, +\infty[$, definida por $f(x) = 4x + \ln(x-3)$.

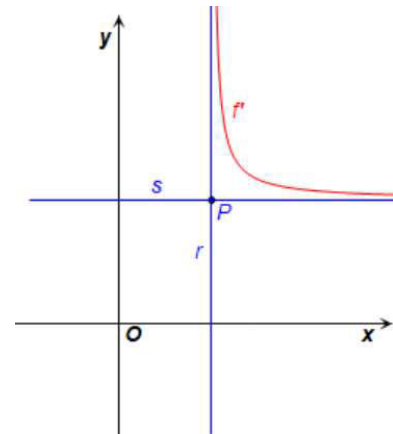
7.1. Qual é o valor de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$?

- (A) 0 (B) 5 (C) 4 (D) $+\infty$

7.2. Na figura, em referencial o.n. Oxy , está representada a função f' , função derivada de f .

Sabe-se que as retas r e s são assíntotas ao gráfico de f' e P é o ponto de interseção destas retas.

Determina as coordenadas do ponto P .

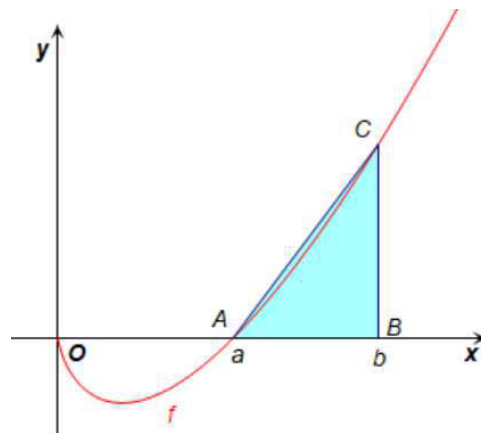


8. Na figura, em referencial o.n. Oxy , está representada a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por:

$$f(x) = x \ln x - x$$

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(a, 0)$, sendo a zero da função;
- o ponto B tem coordenadas $(b, 0)$;
- o ponto C pertence ao gráfico de f e tem abcissa igual à do ponto B ;
- $b > a$.



8.1. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determina $f'(e)$.

8.2. Considera $b = 2e$.

Mostra que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $e^2 \ln 2$.

9. Considera a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ 1 - \cos(3x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

9.1. Sejam A o ponto do gráfico da função com abcissa $-\frac{\pi}{6}$ e t a reta tangente ao gráfico de f no ponto A .

Sabe-se que a reta s é perpendicular à reta t e que passa pelo ponto A .

Qual é o declive da reta s ?

- (A) -3 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

9.2. Mostra que a equação $f(x) = \sin x$ é possível no intervalo $\left] -\frac{4\pi}{3}, -\pi \right[$.

9.3. Calcula o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

10. Na sessão de apresentação de um livro literário foram vendidos alguns exemplares. Sabe-se que o número de livros, em centenas, vendidos até t meses após a sessão de apresentação, é dado pelo seguinte modelo matemático:

$$L(t) = \frac{96}{1 + 3e^{-0,5t}}$$

10.1. Calcula os seguintes valores e interpreta o resultado no contexto apresentado:

a) $L(0)$

b) $L(3) - L(2)$, apresentando o valor arredondado às centésimas.

10.2. Recorre às capacidades gráficas da calculadora e resolve o seguinte problema:

“Houve um mês em que foram vendidos 73 livros.

Determina o número total de livros vendidos até o final desse mês.”

Sugestão: Identifica o significado da expressão $L(t+1) - L(t)$.

Na tua resolução deves apresentar:

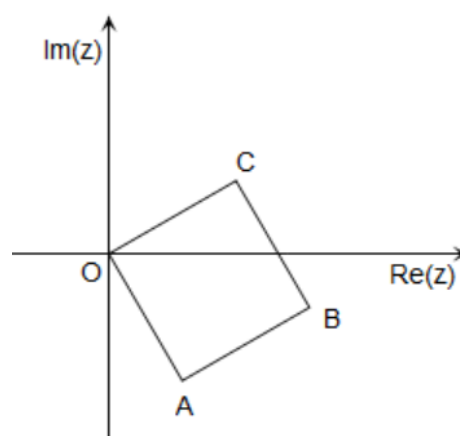
- a equação que te permite determinar o mês em que foram vendidos 73 livros;
- a resolução gráfica da equação;
- a expressão que te permite dar a resposta ao problema.

11. Seja x um número real e $z = x + 2i$ um número complexo.
- 11.1. Determina para que valores de x , o afixo (imagem geométrica) de z , no plano complexo, pertence à circunferência de centro no afixo de i e raio 2.
- 11.2. Considera $x = \sqrt{12}$ e determina o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo.

12. Na figura, no plano complexo, está representado o quadrado $[OABC]$.

Os pontos A , B e C são os afixos (imagens geométricas) dos números complexos z_A , z_B e z_C , respetivamente.

Sabe-se que $z_C = \sqrt{3} + i$.



- 12.1. Representa z_B na forma trigonométrica, em que o argumento pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.

- 12.2. Sabe-se que $z = 2e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Indica, na forma de intervalo de números reais, os valores de θ para os quais o afixo de z pertence ao quadrado $[OABC]$.

FIM

Cotações																						Total	
Questões	1.	2.1	2.2	3.	4	5	6.1	6.2	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	9.3	10.1 a)	10.1 b)	10.2	11.1	11.2	12.1	12.2	
Pontos	6	10	10	10	6	10	6	10	6	10	10	10	10	10	10	7	7	12	10	10	10	10	200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;

r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

COMPLEXOS

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \quad \text{ou} \quad (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

PROBABILIDADES

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

LIMITES NOTÁVEIS

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

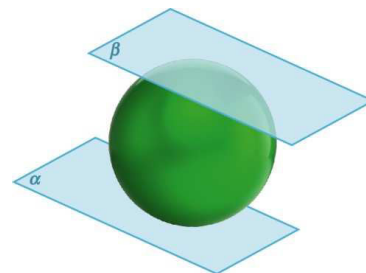
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Seja $T(x, y, z)$ o ponto de tangência do plano α à esfera e $P(-3, 4, 0)$ o ponto de tangência do plano β .

O centro da esfera $O(0, 0, 0)$ é o ponto médio de $[TP]$.

Assim:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = 0 \\ \frac{y+4}{2} = 0 \\ \frac{z+0}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ z = 0 \end{cases}$$



As coordenadas do ponto T são $(3, -4, 0)$.

O vetor $\vec{TO} = O - T = (-3, 4, 0)$ é normal ao plano α .

O plano α é definido por uma equação do tipo: $-3x + 4y + d = 0$.

O ponto T pertence a α , pelo que $-3 \times 3 + 4 \times (-4) + d = 0$, ou seja, $d = 25$.

Assim, a equação do plano α é: $-3x + 4y + 25 = 0$

Resposta: Opção (C) $-3x + 4y + 25 = 0$

2.

- 2.1. Os pontos A, B e C definem um plano se forem não colineares.

Uma equação da reta AB é: $(x, y, z) = A + k \vec{AB}$, $k \in \mathbb{R}$

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + k(-1, 2, -3), k \in \mathbb{R}$$

Qualquer ponto da reta AB é do tipo $(1 - k, -1 + 2k, 1 - 3k)$, $k \in \mathbb{R}$.

O ponto C pertence à reta AB se:

$$\begin{cases} 2 = 1 - k \\ m + 2 = -1 + 2k \\ 4 = 1 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ m = -5 \end{cases}$$

Os pontos A, B e C são colineares se $m = -5$ e definem um plano se $m \neq -5$.

Resposta: $m \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

2.2 O ângulo BAC é obtuso se e só se $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0 \Leftrightarrow (-1, 2, -3) \cdot (1, m+3, 3) < 0 \Leftrightarrow -1 + 2m + 6 - 9 < 0 \Leftrightarrow m < 2$$

Resposta: $m \in]-\infty, 2[$

3.
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sabe-se que:
$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 44 \\ u_{n+1} + u_n = 970 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 44 \\ u_{n+1} + u_n = 970 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n = 44 \\ u_n + 2n + u_n = 970 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 22 \\ 2u_n + 44 = 970 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 22 \\ u_n = 463 \end{cases}$$

Como $u_{n+1} = u_n + 2n$, então $u_{23} = 463 + 44 = 507$.

Os termos consecutivos são $u_{22} = 463$ e $u_{23} = 507$.

Resposta: Os termos consecutivos que satisfazem as condições são 463 e 507, sendo os termos de ordens 22 e 23, respetivamente.

4. $u_5 = u_3 + 2r$

$$2r = u_5 - u_3 \Leftrightarrow 2r = \log_2(3k) - \log_2(k) \Leftrightarrow 2r = \log_2\left(\frac{3k}{k}\right) \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \log_2 3 \Leftrightarrow r = \log_2 \sqrt{3}$$

Resposta: Opção (D) $\log_2 \sqrt{3}$

5. Sabe-se que:

▪ $P(A \cap B) = P(\overline{A \cup B})$

▪ $P(A) = 0,34$

▪ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Atendendo a que $P(A \cap B) = P(\overline{A \cup B})$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\overline{A \cup B})$.

Mas, $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$, pelo que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (1 - P(A \cup B))$.

Daqui resulta que $P(A) + P(B) = 1$.

Como $P(A) = 0,34$, então $P(B) = 1 - 0,34 = 0,66$.

Resposta: $P(B) = 0,66$

6.



6.1. O número possível de matrículas no sistema anterior é:

$$10^2 \times 23^2 \times 10^2 = 5\,290\,000$$

O número possível de matrículas no novo sistema é:

$$26^2 \times 10^2 \times 26^2 = 45\,697\,600$$

$$45\,697\,600 - 5\,290\,000 = 40\,407\,600$$

Resposta: Opção (A) 40 407 600

6.2. Número de casos possíveis: $26^2 \times 10^2 \times 26^2 = 45\,697\,600$

Número de casos favoráveis:

Qualquer uma das 26 letras pode repetir-se três vezes. A outra letra terá as restantes possibilidades, ou seja, 25.

Dos quatro lugares para as letras há 4C_3 lugares para as letras iguais.

Assim, o número de casos favoráveis é dado por: $26 \cdot {}^4C_3 \times 25 \times 10^2 = 260\,000$

Seja P a probabilidade pedida.

$$P = \frac{260\,000}{45\,697\,600} \approx 0,006$$

Resposta: 0,006

7.

7.1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = f'(4)$

$$f'(x) = (4x + \ln(x-3))' = 4 + \frac{1}{x-3}$$

$$f'(4) = 4 + \frac{1}{4-3} = 5$$

Resposta: Opção (B)

7.2. $f'(x) = (4x + \ln(x-3))' = 4 + \frac{1}{x-3}$; $x \in]3, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(4 + \frac{1}{x-3} \right) = 4 + (+\infty) = +\infty$. A reta $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de f' .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{x-3} \right) = 4 + 0 = 4$. A reta $y = 4$ é assíntota horizontal ao gráfico de f' .

As coordenadas do ponto P são $(3, 4)$.

Resposta: $P(3, 4)$

8.

8.1. $f(x) = x \ln x - x$

$$\begin{aligned} f'(e) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e+h) \ln(e+h) - (e+h) - e \ln e + e}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e+h)(\ln(e+h) - 1)}{h} \end{aligned}$$

Substituição:

Seja $\ln(e+h) - 1 = y$. Se $h \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

Se $\ln(e+h) - 1 = y$, então $\ln(e+h) = y + 1$, ou seja, $e+h = e^{y+1}$.

Daqui resulta que $h = e^{y+1} - e$. Assim:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e+h)(\ln(e+h) - 1)}{h} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y+1} \times y}{e^{y+1} - e} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{e^{y+1}}{e} \times \frac{y}{e^y - 1} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} e^y \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

Resposta: $f'(e) = 1$

8.2 $f(x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \ln x - x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = e$

$$a = e$$

$$\overline{AB} = b - a = 2e - e = e$$

As coordenadas do ponto C são $(2e, f(2e))$.

$$f(2e) = 2e \ln(2e) - 2e$$

$$\overline{BC} = 2e \ln(2e) - 2e = 2e(\ln 2 + \ln e) - 2e = 2e \ln 2 + 2e - 2e = 2e \ln 2$$

$$\text{Área do triângulo } [ABC]: \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{e \times 2e \ln 2}{2} = e^2 \ln 2$$

9.

9.1. Se $x < 0$, $f'(x) = (1 - \cos(3x))' = 3 \sin(3x)$.

O declive da reta r é igual a $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -3$.

O declive da reta s é o simétrico do inverso do declive da reta r , ou seja, $\frac{1}{3}$.

Resposta: Opção (D) $\frac{1}{3}$

9.2. No intervalo $\left[-\frac{4\pi}{3}, -\pi\right]$, $f(x) = 1 - \cos(3x)$.

No intervalo $\left[-\frac{4\pi}{3}, -\pi\right]$, a equação $f(x) = \sin x$ é equivalente a $1 - \cos(3x) = \sin x$.

$$1 - \cos(3x) = \sin x \Leftrightarrow 1 - \cos(3x) - \sin x = 0$$

Seja g a função definida por $g(x) = 1 - \cos(3x) - \sin x$.

▪ A função g é contínua em $\left[-\frac{4\pi}{3}, -\pi\right]$.

$$▪ g\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \cos(-4\pi) - \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$▪ g(-\pi) = 1 - \cos(-3\pi) - \sin(-\pi) = 1 + 1 - 0 = 2$$

Então:

▪ A função g contínua em $\left[-\frac{4\pi}{3}, -\pi\right]$.

$$▪ g\left(-\frac{4\pi}{3}\right) \times g(-\pi) < 0$$

Recorrendo ao Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que:

$$\exists c \in \left]-\frac{4\pi}{3}, -\pi\right[: g(c) = 0$$

Mas, $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = \sin c$.

A equação $f(x) = \sin x$ é possível no intervalo $\left]-\frac{4\pi}{3}, -\pi\right[$.

$$9.3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Se $\frac{1}{x} = y$, quando $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow 0$.

$$\text{Assim, } 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2.$$

Resposta: 2

$$10. \quad L(t) = \frac{96}{1 + 3e^{-0,5t}}$$

$$10.1. \quad \text{a) } L(0) = \frac{96}{1 + 3} = 24$$

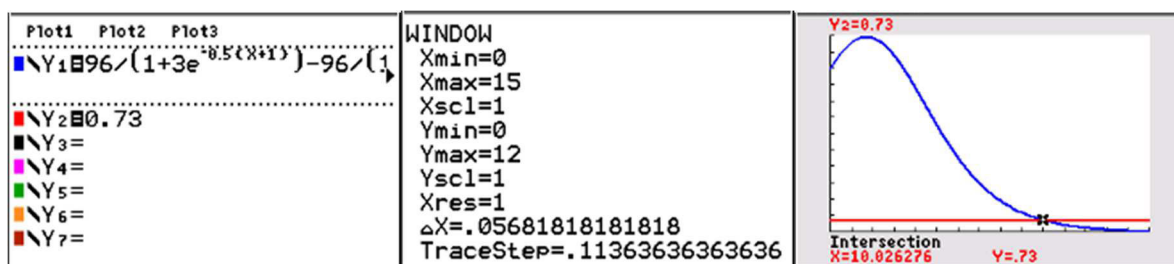
Na sessão de apresentação do livro foram vendidos 2400 exemplares.

$$\text{b) } L(3) - L(2) \approx 11,87$$

Durante o terceiro mês após o lançamento do livro, foram vendidos 1187 exemplares.

- 10.2. No contexto apresentado, a expressão $L(t+1) - L(t)$ representa o número de livros vendidos durante o mês seguinte a terem passado t meses após a sessão de apresentação do livro.

$$\frac{96}{1 + 3e^{-0,5(t+1)}} - \frac{96}{1 + 3e^{-0,5t}} = 0,73$$



$$t \approx 10; t+1 = 11$$

Durante o 11.º mês após a apresentação do livro, foram vendidos 73 livros.

O número total de livros, em centenas, vendidos até ao fim do 11.º mês é dado por:

$$L(11) = \frac{96}{1 + 3e^{-5,5}} \approx 94,84 \text{ (9484 livros)}$$

Resposta: Aproximadamente 9484 livros.

11.

11.1. $|z - i| = 2$

$$|z - i| = 2 \Leftrightarrow |x + 2i - i| = 2 \Leftrightarrow |x + i| = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

Resposta: $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

11.2. $z = \sqrt{12} + 2i$

Seja θ argumento de z e $\theta \in [0, 2\pi[$.

$$\tan \theta = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e o afixo de } z \text{ pertence ao } 1.^\circ \text{ quadrante. Então, } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$|z| = |\sqrt{12} + 2i| = \sqrt{12 + 4} = 4$$

$$z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z^n = 4^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

z^n é um número real negativo se e só se $\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow n = 6 + 12k$$

O menor número natural que satisfaz a condição é 6.

Resposta: 6

12.

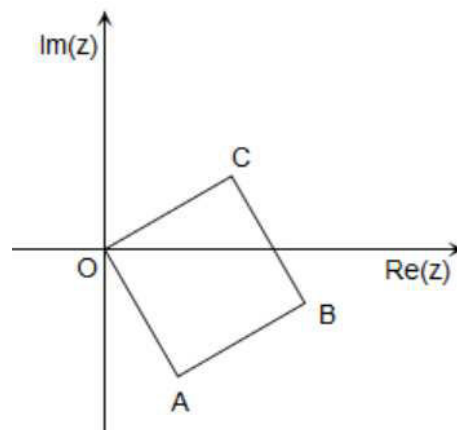
12.1. $|z_C| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3 + 1} = 2$

Seja θ o argumento positivo mínimo de z_C .

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e o afixo de } z_C \text{ pertence ao}$$

1.º quadrante.

$$\text{Então, } \theta = \frac{\pi}{6}.$$



$[OB]$ é uma das diagonais de um quadrado de lado 2.

$$\overline{OB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Assim, $|z_B| = 2\sqrt{2}$.

Sabe-se que $B\hat{O}C = \frac{\pi}{4}$.

Seja α o argumento positivo mínimo de z_B .

$$\alpha = 2\pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$$

z_B na forma trigonométrica é representado por $2\sqrt{2} e^{i\frac{23\pi}{12}}$.

Resposta: $z_B = 2\sqrt{2} e^{i\frac{23\pi}{12}}$

12.2. $z_A = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ e $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$z = 2e^{i\theta}, \theta \in]-\pi, \pi]$$

O afixo de z pertence ao quadrado se $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$.

FIM