

5. Considera o conjunto $A = \{1, 2, 4, 6\}$.

Das proposições seguintes indica a que é falsa.

(A) $\forall x, x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1$ (B) $\exists x: x \in A \wedge x^2 = 2x$

(C) $\forall x, x \in A \Rightarrow x^2 \notin A$ (D) $\forall x, x \in A \Rightarrow |x| = x$

6. O volume de um cubo é representado por $8a$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

Sabe-se que a medida da aresta do cubo é igual $6\sqrt[3]{5}$.

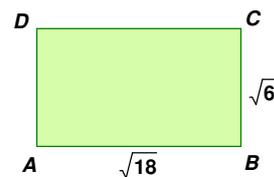
O valor de a é:

- (A) 135 (B) 90 (C) 900 (D) 180

7. Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$.

Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que:

- $\overline{AB} = \sqrt{18}$
- $\overline{BC} = \sqrt{6}$



A área do retângulo pode ser representada por uma expressão do tipo $2k\sqrt{k}$, com $k \in \mathbb{R}^+$.

O valor de k é:

- (A) 2 (B) 6 (C) 3 (D) 5

2.ª Parte

Dá respostas completas apresentando todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Copia e completa a seguinte tabela.

Proposição	Valor lógico
$\sqrt[5]{-18} > \sqrt[4]{2}$	
$\forall x, x \text{ é número primo} \Rightarrow x \text{ é ímpar}$	
$\exists x: x > x$	
$\forall x, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}$	

2. Recorre apenas a propriedades das operações lógicas e mostra que $p \vee (q \Rightarrow \sim p)$ é uma tautologia.

3. Considera as proposições:

a: “O médico trabalha no hospital.”

b: “O médico desloca-se de automóvel.”

c: “O médico não chega atrasado.”

3.1. Traduz para linguagem corrente a proposição: $(\sim a \wedge b) \Rightarrow \sim c$

3.2. Traduz em linguagem simbólica:

“O médico não chega atrasado se e só se trabalha no hospital.”

3.3. Sabe-se que a proposição $(a \wedge \sim c) \Rightarrow (c \vee b)$ é falsa.

Determina os valores lógicos das proposições elementares **a**, **b** e **c**.

4. Completa a tabela seguinte, escrevendo a negação de cada uma das proposições, sem utilizar o símbolo \sim .

Proposição	Negação (sem utilizar o símbolo \sim)
$\forall x, 2x < 5 \vee x^2 = 1$	
$\exists x: 3x - 1 \geq 0 \wedge x + 3 < 1$	
$\forall x, 1 \leq x < 3$	

5. Seja U o universo dos quadriláteros.

Considera em U as condições:

$a(x)$: x é paralelogramo

$b(x)$: x é retângulo

5.1. Mostra que a proposição $\forall x, a(x) \Rightarrow b(x)$ é falsa, recorrendo a um contraexemplo.

5.2. Traduz por uma implicação a afirmação: “Ser retângulo é condição suficiente para ser paralelogramo.”

6. Considera, em \mathbb{R} , as condições $p(x)$ e $q(x)$ e os conjuntos A e B , tais que:

- $p(x): 3 - \frac{1-x}{2} < 4$
- $q(x): (x-3)(x^2+4x)=0$
- $A = \{x: p(x)\}$
- $B = \{x: q(x)\}$

6.1. Mostra que $A =]-\infty, 3[$ e $B = \{-4, 0, 3\}$.

6.2. Representa, em extensão, o conjunto:

a) $C = \{x: p(x) \wedge q(x)\}$

b) $B \setminus A$

7. Determina o número real a , sabendo que:

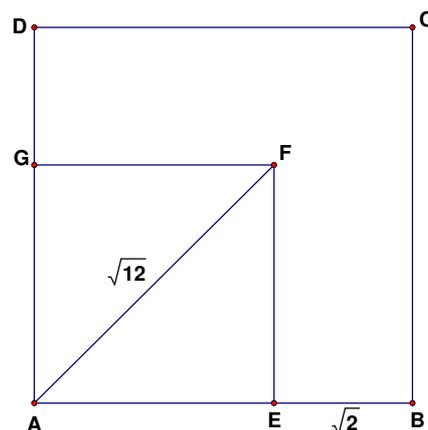
$$(\sqrt[3]{2})^2 \times \sqrt[3]{6} = 2\sqrt[3]{a}$$

8. Na figura estão representados dois quadrados: $[ABCD]$ e $[AEFG]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AF} = \sqrt{12}$
- $\overline{EB} = \sqrt{2}$

Mostra que a área do quadrado $[ABCD]$ é igual a $8 + 4\sqrt{3}$.



FIM

Cotações																				
		1.ª Parte							2.ª Parte											
Questões	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	1.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	5.1.	5.2.	6.1.	6.2. a)	6.2. b)	7.	8.
Cotações	6	6	6	6	6	6	6	8	15	12	12	12	12	10	10	16	12	12	12	15

1.ª Parte

1. Como $p \Rightarrow \sim q$ é falso, conclui-se que p é verdadeira e $\sim q$ é falsa, ou seja, p é verdadeira e q é também verdadeira.

Assim, $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.

Opção (B)

2.

Para $A = [0, 3]$, tem-se $\bar{A} =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$ e assim $B \cap \bar{A} =]-2, 0[\cup]3, +\infty[$.

Para $A =]-\infty, 3]$, tem-se $\bar{A} =]3, +\infty[$ e assim $B \cap \bar{A} =]3, +\infty[$.

Para $A =]3, 5]$, tem-se $\bar{A} =]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[$ e assim $B \cap \bar{A} =]-2, 3[\cup]5, +\infty[$.

Para $A =]3, +\infty[$, tem-se $\bar{A} =]-\infty, 3]$ e assim $B \cap \bar{A} =]-2, 3]$, como se refere no enunciado.

Opção (D)

3. $x^2 + x = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$. Repara que $\Delta < 0$. A equação é impossível em \mathbb{R} .

$$3 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow -2x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty[$$

Como $p(x)$ é impossível, $\sim p(x)$ é universal.

Então $\sim p(x) \vee q(x)$ é universal.

Opção (C)

4. $A =]0, \pi]$ e $B =]\sqrt{7}, +\infty[$. Então, $A \setminus B =]0, \sqrt{7}]$.

Opção (A)

5. $\forall x, x \in A \Rightarrow x^2 \notin A$ é falsa, pois $2 \in A \wedge 2^2 \in A$.

Opção (C)

6. Como o volume do cubo é $8a$ e a medida da aresta é $6\sqrt[3]{5}$, tem-se:

$$8a = (6\sqrt[3]{5})^3 \Leftrightarrow 8a = 6^3 \times 5 \Leftrightarrow a = \frac{6^3 \times 5}{2^3} \Leftrightarrow a = 3^3 \times 5 \Leftrightarrow a = 135$$

Opção (A)

7. $\overline{AB} \times \overline{BC} = \sqrt{18} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 2 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3^3} = 2 \times 3\sqrt{3}$

Então, $k = 3$.

Opção (C)

2.ª Parte

1.

Proposição	Valor lógico
$\sqrt[5]{-18} > \sqrt[4]{2}$	F
$\forall x, x \text{ é número primo} \Rightarrow x \text{ é ímpar}$	F
$\exists x: x > x$	V
$\forall x, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}$	F

2. $p \vee (q \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow$

$$p \vee (\sim q \vee \sim p) \Leftrightarrow$$

$$p \vee \sim p \vee \sim q \Leftrightarrow$$

$$V \vee \sim q \Leftrightarrow$$

$$V \text{ Tautologia}$$

3. Considera as proposições:

a: “O médico trabalha no hospital.”

b: “O médico desloca-se de automóvel.”

c: “O médico não chega atrasado.”

3.1. Se o médico não trabalha no hospital e desloca-se de automóvel, então chega atrasado.

3.2. $c \Leftrightarrow a$

3.3. Como $(a \wedge \sim c) \Rightarrow (c \vee b)$ é **falsa**, tem-se:

$a \wedge \sim c$ é verdadeira e $c \vee b$ é falsa.

Como $a \wedge \sim c$ é verdadeira, a é verdadeira e $\sim c$ é verdadeira, ou seja, c é falsa.

Como $c \vee b$ é falsa e c é falsa, conclui-se que b é falsa.

Assim, a é verdadeira, b é falsa e c é falsa.

4.

Proposição	Negação (sem utilizar o símbolo \sim)
$\forall x, 2x < 5 \vee x^2 = 1$	$\exists x, 2x \geq 5 \wedge x^2 \neq 1$
$\exists x: 3x - 1 \geq 0 \wedge x + 3 < 1$	$\forall x: 3x - 1 < 0 \vee x + 3 \geq 1$
$\forall x, 1 \leq x < 3$	$\exists x, x < 1 \vee x \geq 3$

5.

5.1. A proposição $\forall x, a(x) \Rightarrow b(x)$ é falsa porque nem todos os paralelogramos são retângulos.

Para contraexemplo basta considerar um paralelogramo com lados não perpendiculares como o da figura.



5.2. $b(x) \Rightarrow a(x)$

6.

$$6.1. 3 - \frac{1-x}{2} < 4 \Leftrightarrow 6 - 1 + x < 8 \Leftrightarrow x < 3$$

$$A = \{x: p(x)\} =]-\infty, 3[$$

$$(x-3)(x^2+4x)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \vee x^2+4x=0 \Leftrightarrow$$

$$x=3 \vee x(x+4)=0 \Leftrightarrow x=3 \vee x=0 \vee x=-4$$

$$B = \{x: q(x)\} = \{-4, 0, 3\}$$

6.2.

a) $C = \{x: p(x) \wedge q(x)\} = A \cap B = \{-4, 0\}$

b) $B \setminus A = \{3\}$

$$7. (\sqrt[3]{2})^2 \times \sqrt[3]{6} = 2\sqrt[3]{a} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2 \times 3} = 2\sqrt[3]{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{a} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt[3]{3}}{2} = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow a = 3$$

8. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AF}^2$.

Como $\overline{EF} = \overline{AE}$, tem-se $2\overline{AE}^2 = 12 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 6$.

Então, $\overline{AE} = \sqrt{6}$ e $\overline{AB} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

$$A_{[ABCD]} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 2 \times 2\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

FIM