

Teste N.º 2

**Matemática A**

---

Duração do Teste: 90 minutos

---

**11.º Ano de Escolaridade**

---

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

---

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

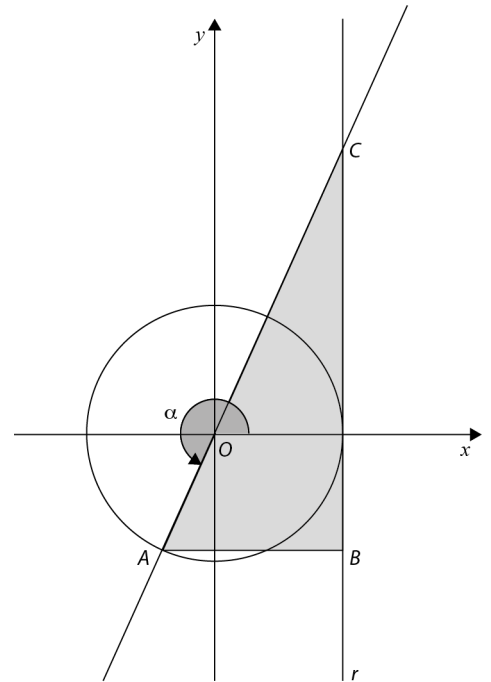
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Na figura estão representados, num referencial o.n.  $Oxy$ , a circunferência trigonométrica e o triângulo  $[ABC]$ .

Sabe-se que:

- a reta  $r$  é tangente à circunferência no ponto de coordenadas  $(1, 0)$ ;
- o ponto  $A$  pertence ao terceiro quadrante e à circunferência;
- o ponto  $B$  é o ponto da reta  $r$  com ordenada igual à do ponto  $A$ ;
- o ponto  $C$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com a reta  $OA$ ;
- $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo  $Ox$  e por lado extremidade a semirreta  $\hat{OA}$ ,  $\alpha \in ]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ .



1.1. Mostre que a área do triângulo  $[ABC]$  pode ser dada, em função de  $\alpha$ , por:

$$A(\alpha) = \frac{\text{sen } \alpha}{2} \left( -2 + \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

1.2. Para uma certa posição do ponto  $A$ , sabe-se que  $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$ .

Sem recurso à calculadora, determine, para essa posição do ponto  $A$ , o valor exato da área do triângulo  $[ABC]$ . Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

1.3. Considere, para um certo valor de  $\alpha_1$  (compreendido entre  $\frac{9\pi}{8}$  e  $\frac{11\pi}{8}$ ), a área do triângulo  $[ABC]$ . Sabe-se que, quando esse valor de  $\alpha_1$  aumenta  $\frac{\pi}{8}$  radianos, a área do triângulo  $[ABC]$  triplica.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de  $\alpha_1$ , sabendo que no intervalo considerado esse valor existe e é único.

Apresente o resultado com aproximação às centésimas.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

2. De dois ângulos, de amplitudes  $\alpha$  e  $\beta$ , sabe-se que  $\alpha \in ]-\frac{3\pi}{2}, -\pi[$  e  $\beta \in ]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ .

Então, pode afirmar-se que:

(A)  $\sin \alpha \times \cos \beta < 0$

(B)  $\operatorname{tg} \alpha \times \operatorname{tg} \beta < 0$

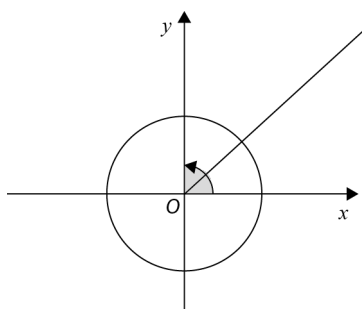
(C)  $\cos \alpha + \sin \beta > 0$

(D)  $\sin \alpha - \sin \beta > 0$

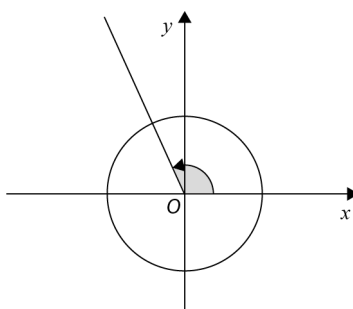
3. Em cada uma das figuras seguintes, está representado, na circunferência trigonométrica, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$ .

Em qual das figuras esse ângulo pode ter 4 radianos de amplitude?

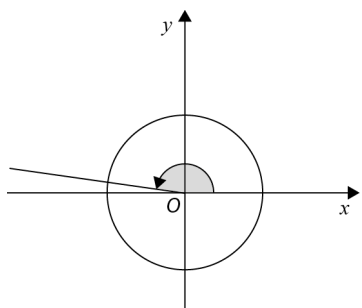
(A)



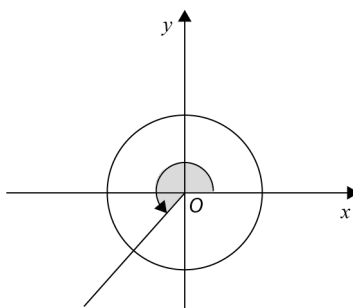
(B)



(C)



(D)



4. Seja  $\alpha \in ]-\pi, 0[$ .

Sabe-se que  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -2$ .

Determine, o mais simplificado possível, o valor exato de:

$$\cos(-\pi - \alpha) - \operatorname{tg}(-\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\alpha + \pi)$$

5. Considere a função  $f$  definida por:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2(2x)}$$

Considere as seguintes proposições:

(I)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ x: x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

(II)  $\frac{\pi}{2}$  é período da função  $f$ .

Em relação às proposições anteriores, podemos afirmar que:

- (A) são ambas verdadeiras.
- (B) são ambas falsas.
- (C) apenas (I) é verdadeira.
- (D) apenas (II) é verdadeira.

6. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \left\{ x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ , definida por:

$$f(x) = (\cos x + \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \operatorname{sen} x)^2$$

Utilizando processos exclusivamente analíticos, resolva as alíneas seguintes.

6.1. Mostre que:

$$\forall x \in D_f, f(x) = 1 + \frac{1}{\cos^2 x}$$

6.2. Estude a função  $f$  quanto à paridade.

6.3. Resolva, em  $\mathbb{R} \setminus \left\{ x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ , a equação  $f(x) = 3$ .

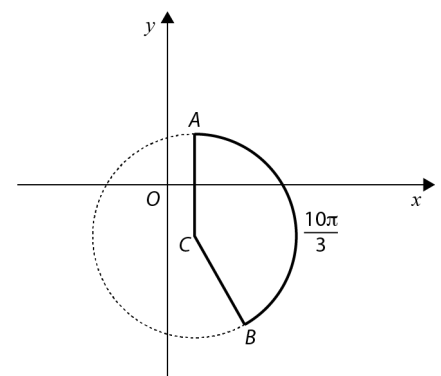
7. Na figura está representada, em referencial o.n.  $Oxy$ , a circunferência de equação:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 11$$

Sabe-se que:

- o ponto  $C$  é o centro da circunferência;
- $A$  e  $B$  são dois pontos da circunferência;
- o arco de circunferência  $AB$  tem comprimento  $\frac{10\pi}{3}$ .

Determine o valor do produto escalar  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .



8. Considere, num referencial o.n.  $Oxy$ , uma reta  $r$  de inclinação  $\alpha$ . Sabe-se que  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ .

Qual pode ser a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta  $r$ ?

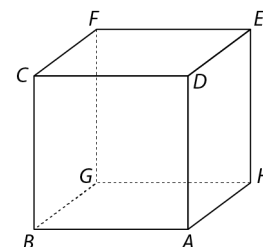
- (A)  $y = 3x$                       (B)  $y = -3x$                       (C)  $y = \frac{1}{3}x$                       (D)  $y = -\frac{1}{3}x$

9. Na figura está representado o cubo  $[ABCDEFGH]$ .

Fixado um determinado referencial o.n.  $Oxyz$ , tem-se:

- $E(7, 11, 4)$  e  $F(10, 5, 6)$ ;
- a reta  $BD$  definida pela equação:

$$(x, y, z) = (3, -9, -1) + k(-1, 9, 4), k \in \mathbb{R}$$



9.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta  $BD$  e que passa no ponto  $F$ ?

- (A)  $(x, y, z) = (10, 5, 6) + k(-4, 0, 1), k \in \mathbb{R}$   
 (B)  $(x, y, z) = (10, 5, 6) + k(-6, 2, 3), k \in \mathbb{R}$   
 (C)  $(x, y, z) = (7, 2, 0) + k(-1, -1, 2), k \in \mathbb{R}$   
 (D)  $(x, y, z) = (-16, 3, 4) + k(13, 1, 1), k \in \mathbb{R}$

9.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora. Determine as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{BE}$ .

9.3. Determine a amplitude do ângulo  $OEF$ .

Apresente o resultado em graus arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

**FIM**

### COTAÇÕES

| Item                |      |      |    |    |    |    |      |      |      |    |    |      |      |      |       |
|---------------------|------|------|----|----|----|----|------|------|------|----|----|------|------|------|-------|
| Cotação (em pontos) |      |      |    |    |    |    |      |      |      |    |    |      |      |      |       |
| 1.1.                | 1.2. | 1.3. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6.1. | 6.2. | 6.3. | 7. | 8. | 9.1. | 9.2. | 9.3. | TOTAL |
| 15                  | 15   | 15   | 10 | 10 | 15 | 10 | 15   | 15   | 15   | 15 | 10 | 10   | 15   | 15   | 200   |

## TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1.

1.1. Sabemos que  $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $B(1, \sin \alpha)$  e  $C(1, \operatorname{tg} \alpha)$ .

Como  $A$  pertence ao 3.º quadrante  $\cos \alpha < 0$ ,  $\sin \alpha < 0$  e  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ .

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{(1 - \cos \alpha)(-\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha)}{2} = \frac{-\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{2} = \\ &= \frac{-2 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{2} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{2} \left( -2 + \cos \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha} \right) = \\ &= \frac{\sin \alpha}{2} \left( -2 + \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} \right) = \\ &= \frac{\sin \alpha}{2} \left( -2 + \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

1.2.  $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\sin \alpha = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Como  $\alpha \in 3.º \text{ Q}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{2} \times \left( -2 + \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) &= -\frac{3}{10} \times \left( -2 - \frac{4}{5} - \frac{5}{4} \right) = -\frac{3}{10} \times \left( -\frac{40}{20} - \frac{16}{20} - \frac{25}{20} \right) = \\ &= -\frac{3}{10} \times \left( -\frac{81}{20} \right) = \\ &= \frac{243}{200} \end{aligned}$$

1.3.  $\frac{9\pi}{8} < \alpha_1 < \frac{11\pi}{8}$

$$A\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{8}\right) = 3A(\alpha_1)$$

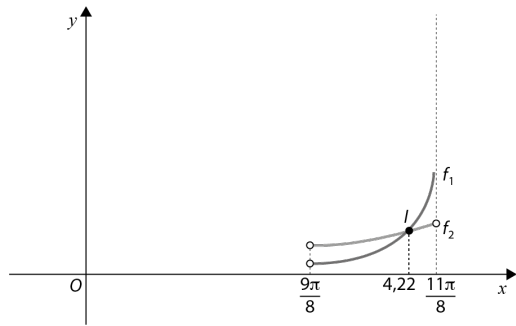
Utilizando  $x$  como variável independente:

$$A\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 3A(x)$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$f_1(x) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)}{2} \left( -2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right)} \right)$$

$$f_2(x) = \frac{3 \sin(x)}{2} \left( -2 + \cos x + \frac{1}{\cos x} \right)$$



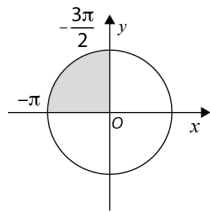
$$I(a, b)$$

$$a \approx 4,22$$

$$b \approx 6,07$$

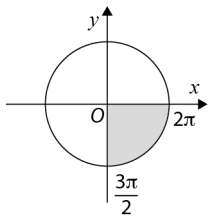
## 2. Opção (D)

$$\alpha \in \left] -\frac{3\pi}{2}, -\pi \right[$$



$$\alpha \in 2.^\circ \text{ Q}$$

$$\beta \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$$



$$\beta \in 4.^\circ \text{ Q}$$

$$\text{sen } \alpha \times \text{cos } \beta > 0$$

$$\text{tg } \alpha \times \text{tg } \beta > 0$$

$$\text{cos } \alpha + \text{sen } \beta < 0$$

$$\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta > 0$$

## 3. Opção (D)

$$\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$$

## 4. $\alpha \in ]-\pi, 0[$

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -2 \Leftrightarrow -\text{tg } \alpha = -2$$

$$\Leftrightarrow \text{tg } \alpha = 2$$

Como  $\alpha \in ]-\pi, 0[$  e  $\text{tg } \alpha > 0$ , então  $\alpha \in 3.^\circ \text{ Q}$ .

$$\text{cos}(-\pi - \alpha) - \text{tg}(-\alpha) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \text{cos}(\alpha + \pi) = -\text{cos } \alpha + \text{tg } \alpha + \text{cos } \alpha - \text{cos } \alpha =$$

$$= -\text{cos } \alpha + \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2$$

### Cálculo auxiliar

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Como } \alpha \in 3.^\circ \text{Q, } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

## 5. Opção (A)

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 - \operatorname{tg}^2(2x) \neq 0 \wedge 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

### Cálculos auxiliares

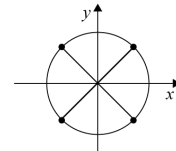
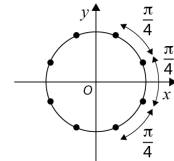
$$\bullet 1 - \operatorname{tg}^2(2x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2(2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 1 \vee \operatorname{tg}(2x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Averiguemos se  $\frac{\pi}{2}$  é período de  $f$ :

$$\bullet \forall x \in D_f \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in D_f$$

$$\bullet \forall x \in D_f \Rightarrow f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2\left(2x + \frac{2\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2(2x)} = f(x)$$

$\frac{\pi}{2}$  é período da função  $f$ .

## 6.

6.1. Seja  $x \in D_f$  qualquer:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\cos x + \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \operatorname{sen} x)^2 = \\ &= \cos^2 x + 2 \cos x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x = \\ &= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \operatorname{sen} x = \\ &= 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$



$$6.2. \forall x \in D_f, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$f(-x) = 1 + \frac{1}{\cos^2(-x)} = 1 + \frac{1}{\cos^2 x} = f(x), \forall x \in D_f$$

Logo,  $f$  é par.

$$6.3 f(x) = 3 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \vee \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$7. x^2 - 2x + y^2 + 4y = 11 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 11 + 1 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$$C(1, -2) \quad r = 4$$

$$A\hat{C}B = \alpha$$

$$\alpha \times r = \frac{10\pi}{3} \Leftrightarrow 4\alpha = \frac{10\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{10\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{CA} \cdot (-\overrightarrow{CB}) = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \\ &= -\|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos(\widehat{CA, CB}) = \\ &= -4 \times 4 \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \\ &= -16 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

### 8. Opção (C)

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 10 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 9 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 3 \vee \operatorname{tg} \alpha = -3$$

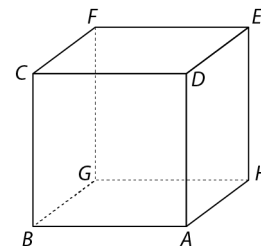
Como  $\cos \alpha < 0$  e  $\alpha$  é a inclinação da reta  $r$ , então  $\alpha \in ]90^\circ, 180^\circ[$ , logo  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ , ou seja,  $\operatorname{tg} \alpha = -3$ .

Assim,  $m_r = -3$ . Logo, o declive de uma reta perpendicular à reta  $r$  terá de ser igual a  $\frac{1}{3}$ .

9.

### 9.1. Opção (D)

Averiguemos qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta  $BD$  e que passa no ponto  $F$ :



- $(x, y, z) = (10, 5, 6) + k(-4, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

O ponto de coordenadas  $(10, 5, 6)$  pertence à reta

$(-4, 0, 1) \cdot (-1, 9, 4) = 4 + 4 = 8$ , logo a reta definida acima não é perpendicular à reta  $BD$ .

- $(x, y, z) = (10, 5, 6) + k(-6, 2, 3), k \in \mathbb{R}$

O ponto de coordenadas  $(10, 5, 6)$  pertence à reta

$(-6, 2, 3) \cdot (-1, 9, 4) = 6 + 18 + 12 = 36$ , logo a reta definida acima não é perpendicular à reta  $BD$ .

- $(x, y, z) = (7, 2, 0) + k(-1, -1, 2), k \in \mathbb{R}$

$$(10, 5, 6) = (7, 2, 0) + k(-1, -1, 2) \Leftrightarrow (10, 5, 6) = (7 - k, 2 - k, 2k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 7 - k \\ 5 = 2 - k \\ 6 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -3 \\ k = 3 \end{cases} \quad \text{Condição impossível.}$$

O ponto de coordenadas  $(10, 5, 6)$  não pertence à reta.

- $(x, y, z) = (-16, 3, 4) + k(13, 1, 1), k \in \mathbb{R}$

$$(10, 5, 6) = (-16, 3, 4) + k(13, 1, 1) \Leftrightarrow (10, 5, 6) = (-16 + 13k, 3 + k, 4 + k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 = -16 + 13k \\ 5 = 3 + k \\ 6 = 4 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, \text{ logo o ponto de coordenadas } (10, 5, 6) \text{ pertence à}$$

reta.

$(13, 1, 1) \cdot (-1, 9, 4) = -13 + 9 + 4 = 0$ , logo a reta definida acima é perpendicular à reta  $BD$ .

9.2. O ponto  $B$  é a interseção do plano  $BCF$  com a reta  $BD$ .

Determinemos, então uma equação do plano  $BCF$ .

$$\overrightarrow{FE} = E - F = (7, 11, 4) - (10, 5, 6) = (-3, 6, -2)$$

Uma equação do plano  $BCF$  é do tipo  $-3x + 6y - 2z + d = 0$ .

Como  $F(10, 5, 6)$  pertence ao plano:

$$-3 \times 10 + 6 \times 5 - 2 \times 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

$$BCF: -3x + 6y - 2z + 12 = 0$$

$$BD: (x, y, z) = (3, -9, -1) + k(-1, 9, 4), k \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico da reta  $BD$ :  $(3 - k, -9 + 9k, -1 + 4k)$ , com  $k \in \mathbb{R}$

Substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta  $BD$  na equação do plano  $BCF$ :

$$-3(3 - k) + 6(-9 + 9k) - 2(-1 + 4k) + 12 = 0 \Leftrightarrow -9 + 3k - 54 + 54k + 2 - 8k + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 49k = 49$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

$$B(3 - 1, -9 + 9, -1 + 4)$$

$$B(2, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{BE} = E - B = (7, 11, 4) - (2, 0, 3) = (5, 11, 1)$$

### 9.3. $\widehat{OEF} = \widehat{EO, EF}$

$$\overrightarrow{EO} = O - E = (-7, -11, -4)$$

$$\overrightarrow{EF} = F - E = (3, -6, 2)$$

$$\|\overrightarrow{EO}\| = \sqrt{49 + 121 + 16} = \sqrt{186}$$

$$\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$$

$$\cos(\widehat{EO, EF}) = \frac{\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{EF}}{\|\overrightarrow{EO}\| \times \|\overrightarrow{EF}\|} \Leftrightarrow \cos(\widehat{EO, EF}) = \frac{-21 + 66 - 8}{7\sqrt{186}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{EO, EF}) = \frac{37}{7\sqrt{186}}$$

Logo,  $(\widehat{EO, EF}) = \cos^{-1}\left(\frac{37}{7\sqrt{186}}\right)$ , ou seja,  $\widehat{EO, EF} \approx 67^\circ$ .