

**Novo Espaço – Matemática A, 11.º ano**  
**Proposta de teste de avaliação [março – 2020]**



Nome: \_\_\_\_\_

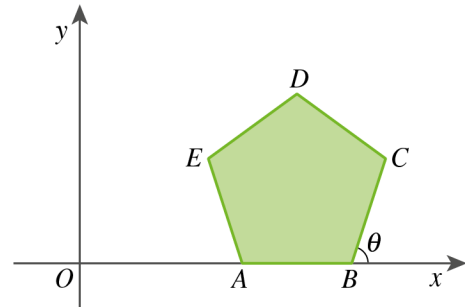
Ano / Turma: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_ - \_\_\_ - \_\_\_

1. Na figura está representado, num referencial o.n.  $Oxy$ , o pentágono regular  $[ABCDE]$ .

Sabe-se que:

- os vértices  $A$  e  $B$  pertencem a  $Ox$ ;
- $\overline{AB} = 2$ ;
- $\theta$  é a inclinação, em graus, da reta  $BC$ .



1.1. Qual das seguintes expressões representa o declive da reta  $AE$ ?

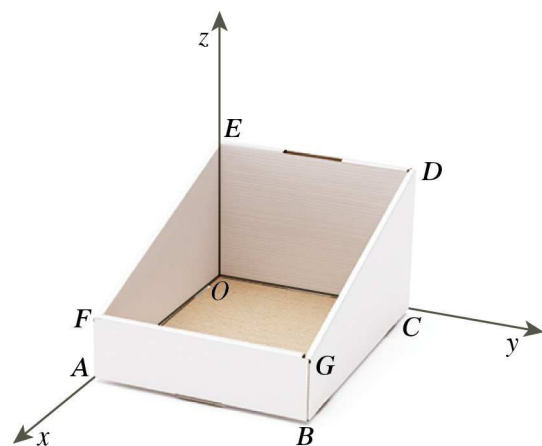
- (A)  $\frac{1}{\tan \theta}$       (B)  $-\cos \theta$       (C)  $-\tan \theta$       (D)  $\frac{1}{\cos \theta}$

1.2. Determina o produto escalar  $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ . Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

2. Na figura está representada uma caixa, num referencial o.n.  $Oxyz$ , com a forma de um prisma, em que as bases são trapézios.

Sabe-se que:

- a base  $[AOEF]$  está contida no plano  $xOz$ ;
- a face  $[OABC]$  está contida no plano  $xOy$ ;
- a face  $[OCDE]$  está contida no plano  $yOz$ ;
- o ponto  $F$  tem coordenadas  $(8, 0, 2)$ ;
- o plano  $EFG$  é definido pela equação:  
 $x + 4z - 16 = 0$



2.1. Determina as coordenadas do ponto  $A$ .

2.2. A superfície esférica de equação  $(x - 8)^2 + y^2 + z^2 = 100$  intersesta o semieixo positivo  $Oy$  no ponto  $C$ .

Determina a amplitude do ângulo  $CFE$ . Apresenta o resultado, em graus, arredondado às décimas.

3. Considera a sucessão  $(u_n)$  definida por:

$$u_n = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{se } n \leq 4 \\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \text{se } n > 4 \end{cases}$$

3.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A sucessão  $(u_n)$  é limitada.      (B) A sucessão  $(u_n)$  é uma progressão aritmética.  
(C) A sucessão  $(u_n)$  é crescente.      (D) A sucessão  $(u_n)$  é uma progressão geométrica.

3.2. A soma de 50 termos consecutivos da sucessão a começar no 5.º termo é igual a:

- (A)  $-1$       (B)  $0$       (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (D)  $1$

4. Seja  $(v_n)$  a sucessão definida por:

$$\begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = n + 2v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sabe-se que  $(v_n)$  é uma progressão aritmética.

4.1. Mostra que  $v_n = -n - 1$ .

4.2. Considera  $(w_n)$  a sucessão tal que  $w_n = \frac{v_n}{2n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Determina o número de termos da sucessão  $(w_n)$  que não pertencem à vizinhança

$$V_{0,01}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

5. Em relação a uma progressão geométrica  $(u_n)$ , sabe-se que  $u_1 = \frac{1}{18}$  e que três termos consecutivos são representados por:  $a$ ,  $a+1$  e  $a+4$ .

Determina a ordem do último destes três termos.

6. Em relação a uma sucessão  $(u_n)$ , sabe-se que.

▪  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$

▪  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 5$

Justifica, de forma clara, as afirmações seguintes:

6.1. Se  $\lim(u_n) = a$ , então  $a \neq 6$ .

6.2. A sucessão  $(u_n)$  é convergente.

7. Num parque de estacionamento, o custo da 1.ª hora é 0,20 €. Cada uma das horas seguintes tem um acréscimo de 25% ao custo da hora anterior.

Seja  $(u_n)$  a sucessão em que o termo geral  $u_n$  representa o custo da  $n$ -ésima hora de estacionamento.

Sabe-se que uma viatura esteve estacionada durante 12 horas no parque de estacionamento.

Determina o custo da última hora de estacionamento e o custo total.

Apresenta os resultados em euros arredondados às centésimas.

Na tua resolução deves apresentar o termo geral da sucessão  $(u_n)$  e a expressão da soma dos  $n$  primeiros termos.



**FIM**

Cotações													Total
Questões	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.1	4.2.	5.	6.1.	6.2.	7.	
Pontos	15	15	10	20	15	15	20	20	20	15	15	20	200

1.

1.1. A inclinação, em graus, da reta  $AE$  é igual a  $180 - \theta$ .

O declive da reta  $AE$  é dado por  $\tan(180 - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan \theta$ .

**Resposta: (C)  $-\tan \theta$**

1.2.  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\widehat{BA, BC})$

Como  $(\widehat{BA, BC}) = 108^\circ$ , tem-se:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\widehat{BA, BC}) = 2 \times 2 \times \cos 108^\circ$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} \approx -1,24$$

**Resposta:  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} \approx -1,24$**

2.

2.1. O ponto  $A$  pertence a  $Ox$  e tem a mesma abcissa de  $F$ .

Assim, conclui-se que  $A(8, 0, 0)$ .

**Resposta:  $A(8, 0, 0)$**

2.2. O ponto  $C$  pertence a  $Oy$  e tem ordenada positiva.

$$C(0, y, 0), \quad y > 0$$

O ponto  $C$  pertence à superfície esférica de equação  $(x-8)^2 + y^2 + z^2 = 100$ , logo:

$$(0-8)^2 + y^2 + 0^2 = 100$$

$$(0-8)^2 + y^2 + 0^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 36 \Leftrightarrow y = 6 \vee y = -6$$

Como  $y > 0$ , conclui-se que  $C(0, 6, 0)$ .

$$\cos(\widehat{CFE}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FE}}) = \frac{\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{FE}}{\|\overrightarrow{FC}\| \times \|\overrightarrow{FE}\|}$$

$$\overrightarrow{FC} = C - F = (0, 6, 0) - (8, 0, 2) = (-8, 6, -2)$$

O ponto  $E$  pertence a  $Oz$  e ao plano cuja equação é  $x + 4z - 16 = 0$ .

Assim, as coordenadas do ponto  $E$  são da forma  $E(0, 0, z)$ .

$$0 + 4z - 16 = 0 \Leftrightarrow z = 4$$

Assim, conclui-se que  $E(0, 0, 4)$ .

$$\overrightarrow{FE} = E - F = (0, 0, 4) - (8, 0, 2) = (-8, 0, 2)$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FE}}) = \frac{\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{FE}}{\|\overrightarrow{FC}\| \times \|\overrightarrow{FE}\|} = \frac{(-8, 6, -2) \cdot (-8, 0, 2)}{\sqrt{64 + 36 + 4} \times \sqrt{64 + 0 + 4}} = \frac{64 - 4}{\sqrt{7072}} = \frac{60}{\sqrt{7072}}$$

Recorrendo à calculadora, obtém-se  $\widehat{CFE} \approx 44,5^\circ$ .

**Resposta:**  $44,5^\circ$

3.

3.1. Se  $n \leq 4$  :  $\frac{1}{4} \leq u_n \leq 4$  (1)

Se  $n > 4$  :  $-1 \leq u_n \leq 1$  (2)

De (1) e (2) conclui-se que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq u_n \leq 4$ .

A sucessão  $(u_n)$  é limitada.

**Resposta:** (A) A sucessão  $(u_n)$  é limitada.

3.2. Para  $n \geq 5$ , a soma de quatro termos consecutivos é igual a 0.

Como  $50 = 4 \times 12 + 2$ , a soma dos 50 termos é igual a  $u_5 + u_6 = 1 + 0 = 1$ .

$$u_5 = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad u_6 = \sin\left(\frac{6\pi}{2}\right) = \sin(3\pi) = 0;$$

$$u_7 = \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 ; \quad u_8 = \sin\left(\frac{8\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0$$

**Resposta: (D)**      1

4.

4.1.  $v_1 = -2$

$$v_2 = 1 + 2 \times v_1 = 1 + 2 \times (-2) = -3$$

Seja  $r$  a razão da progressão aritmética.

$$r = v_2 - v_1 = -3 - (-2) = -1$$

Termo geral:  $v_n = v_1 + (n-1)r = -2 + (n-1) \times (-2)$

$$v_n = v_1 + (n-1)r = -2 + (n-1) \times (-1)$$

$$v_n = -n - 1$$

**Resposta:**  $v_n = -n - 1$

4.2.  $w_n = \frac{-n-1}{2n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n \notin V_{0,01}\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left|u_n + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{-n-1}{2n+1} + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-2n-2+2n+1}{4n+2}\right| \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{4n+2}\right| \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow 4n+2 \leq 100 \Leftrightarrow n \leq \frac{98}{4}$$

Como  $\frac{98}{4} = 24,5$ , conclui-se que existem 24 termos que não pertencem à

$$V_{0,01}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

$$5. \quad \frac{a+1}{a} = \frac{a+4}{a+1} \Leftrightarrow (a+1)^2 = a(a+4) \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = a^2 + 4a \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$a = \frac{1}{2}, \quad a+1 = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad a+4 = \frac{9}{2}$$

$$\text{Razão da progressão geométrica: } \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\text{Termo geral da progressão geométrica: } u_n = u_1 \times r^{n-1} = \frac{1}{18} \times 3^{n-1}$$

$$\frac{1}{18} \times 3^{n-1} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 81 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^4$$

Daqui resulta que  $n-1=4$ , ou seja,  $n=5$ .

**Resposta:** A ordem do último dos três termos considerados é 5.

6.

6.1. Se  $\lim(u_n) = a$ , então  $a \neq 6$ .

Se, por exemplo, considerar a vizinhança  $V_{\frac{1}{2}}(6)$ , não há termos da sucessão pertencentes a esta vizinhança, atendendo a que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 5$ .

Daqui resulta que  $\lim(u_n)$  não pode ser 6.

6.2. A sucessão  $(u_n)$  é convergente.

Sabe-se que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ , pelo que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$  (sucessão crescente).

Sendo  $(u_n)$  crescente:  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_1$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, u_1 \leq u_n < 5$  (sucessão limitada)

Sendo  $(u_n)$  monótona e limitada, conclui-se que é convergente.

$$7. \quad \begin{cases} u_1 = 0,20 \\ u_{n+1} = u_n + 0,25u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0,20 \\ u_{n+1} = 1,25u_n \end{cases}$$

$(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão 1,25 e primeiro termo igual a 0,20.

Termo geral:  $u_n = 0,20 \times 1,25^{n-1}$

$$u_{12} = 0,20 \times 1,25^{11}$$

$$u_{12} \approx 2,33$$

Soma dos  $n$  primeiros termos:  $S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

$$S_{12} = 0,2 \times \frac{1-1,25^{12}}{1-1,25}$$

$$S_{12} \approx 10,84$$

**Resposta:** Pela última hora, o custo foi 2,33 € e o custo total foi 10,84 €.