Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2018/2019)

Mini-teste de Matemática A – 12.º 6

3.º Período | 09/05/19 | Duração: 60 minutos

Nome: ______________________________ N.º:

Classificação: ___ , ___ O professor:

Se nada for dito em contrário, use métodos analíticos para resolver os itens seguintes.
Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

---

1. Alguns oncologistas costumam solicitar um exame de cintilografia óssea para o diagnóstico de problemas no tecido ósseo de um paciente. Assim, para detetar lesões ósseas, uma pequena quantidade de uma substância radioativa (tecnécio ou gálio) é introduzida na veia do paciente.

Admita que a quantidade dessa substância radioativa, ao fim de t horas e a partir de uma massa inicial Q_0, é dada, em miligramas, pela função definida por $Q(t) = Q_0 e^{-0,014t}$, com $t \geq 0$.

1.1. Determine, em percentagem e arredondada às décimas, a quantidade da substância radioativa ao fim de meio dia.

1.2. Determine, arredondado às décimas, o valor de x tal que $Q(t+x) = \dfrac{Q(t)}{2}$.
Interprete o resultado obtido no contexto do problema.

1.3. Suponha que a taxa de desintegração da substância radioativa, está, no instante $t = 3$, a diminuir 5 miligramas por hora.
Nestas condições, determine Q_0.
Apresente o resultado em miligramas, arredondado às décimas.

2. Seja f a função, de domínio $]-5,+\infty[$, definida por $f(x) = 2x^2 + \ln(x+5)$.

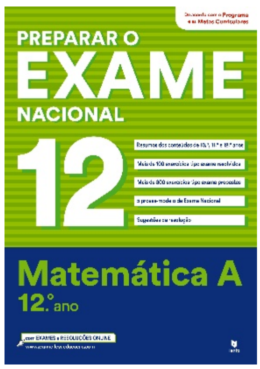
2.1. Mostre que $f''(x) = 4 - \dfrac{1}{(x+5)^2}$ e estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

2.2. Considere agora a função h, de domínio $]-5,+\infty[\setminus\{0\}$, definida por $h(x) = \dfrac{f(x)-2x^2}{x} - 6x$.
O gráfico de h tem uma assíntota de equação $y = k\,x$, sendo $k \neq 0$.
Determine k.

3. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} \ln(1-3x) & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 \ln(3x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

3.1. Estude a continuidade de g no ponto 0.

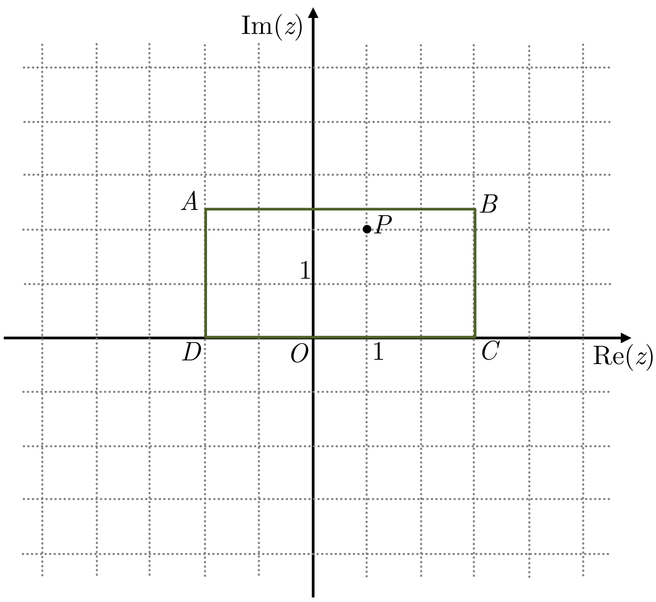
3.2. Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto $\dfrac{1}{3}$.



4. Considere, no plano complexo da figura, o retângulo $[ABCD]$ e o ponto P.

Sabe-se que:

- a área do retângulo $[ABCD]$ é igual a 12 ;
- os pontos A, B, C, D e P são as imagens geométricas, respetivamente, dos complexos z_A, z_B, z_C, z_D e z_P ;
- $\operatorname{Re}(z_A) = \operatorname{Re}(z_D) = -2$;
- $\operatorname{Re}(z_B) = \operatorname{Re}(z_C) = 3$;
- $\operatorname{Im}(z_A) = \operatorname{Im}(z_B) > 0$;
- $\operatorname{Im}(z_C) = \operatorname{Im}(z_D) = 0$;
- $z_P = 1 + 2i$.



4.1. Determine, na forma algébrica, $\overline{z}_A$.

4.2. Para os valores reais a e b, sabe-se que $-\overline{z}_P = ai^{55} + (b - i)^2$.

Determine a e b.

4.3. Suponha que um ponto Q pertence à reta que passa no ponto P e é paralela ao eixo real.

Sabe-se que:

- Q é a imagem geométrica do complexo z_Q , cuja parte real é negativa;
- $|z_Q| = 5$.

Determine, na forma algébrica, z_Q .

4.4. Considere a função definida em $\mathbb{C}$ por $f(z) = \overline{z} - (2 - 6i)$.

Caracterize a transformação do plano complexo definida por f e construa, no referencial da figura, a imagem do ponto P por essa transformação.

FIM

Cotações			
1.	**2.**	**3.**	**4.**
10 15 25	25 15	25 15	15 25 15 15

Formulário

Limites notáveis

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$