

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6

3.º Período

30/05/19

Duração: 120 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

--	--	--

O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Caderno 1: 60 minutos (é permitido o uso de calculadora)

1. A Associação Nacional de Basquetebol (NBA, na sigla original) é a principal liga de basquetebol profissional dos Estados Unidos da América.

1.1. As melhores equipas da NBA ficaram apuradas para os *Playoffs*.

Em relação às primeiras eliminatórias dos *Playoffs*, sabe-se que:

- 75% das equipas tinha média superior a 100 pontos por jogo;
- 7 em 8 equipas tinha uma percentagem superior a 30% nos lançamentos de três pontos;
- de entre as equipas com percentagem superior a 30% nos lançamentos de três pontos, 6 em 7 tinha uma média superior a 100 pontos por jogo.



Ao escolher, ao acaso, uma equipa dos *Playoffs* da NBA, qual é a probabilidade de ela ter uma percentagem superior a 30% nos lançamentos de três pontos mas não ter uma média superior a 100 pontos por jogo?

Apresente o resultado em percentagem.

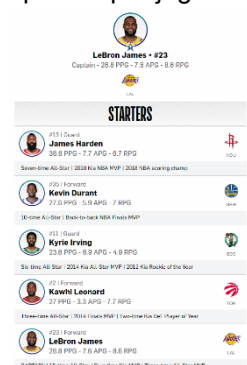
1.2. O *All-Star Game* de 2019 realizou-se em Charlotte (na Carolina do Norte).

Uma das equipas foi escolhida pelo jogador dos Lakers, LeBron James, dispendo para isso de 13 jogadores, 6 dos quais extremos (LeBron James incluído).

A equipa inicial tinha 5 jogadores e LeBron James fez parte dela.

Qual era a probabilidade de a equipa inicial apresentar 3 extremos?

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às milésimas.

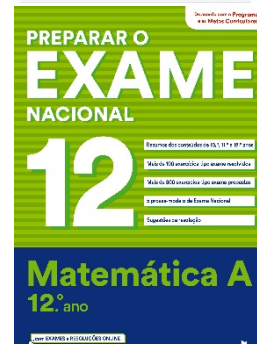


STARTERS	
PG James Harden	36.8 PPG - 7.7 APG - 8.7 RPG
SG Kevin Durant	27.5 PPG - 5.8 APG - 7.8 RPG
PF Kyrie Irving	26.8 PPG - 6.8 APG - 4.9 RPG
PF Kawhi Leonard	27.1 PPG - 6.3 APG - 7.2 RPG
PF LeBron James	26.8 PPG - 7.6 APG - 8.8 RPG

2. As dez medidas dos lados de um decágono estão em progressão aritmética de razão $\frac{8}{3}$.

Seja x a medida do lado mais pequeno do decágono.

Sabendo que o seu perímetro é igual a $30x$ centímetros, determine o valor de x .



3. Um avião aproxima-se do aeroporto da Madeira mas, pela torre de controle, o piloto é avisado de que não pode aterrar, mantendo-se por perto até receber novas orientações. Admita que a distância, medida em quilómetros desde o avião até ao aeroporto da Madeira é dada, t minutos após as 8 horas, aproximadamente por



$$d(t) = \begin{cases} \frac{20t-200}{e^{t-9}-e} + 50 & \text{se } 0 \leq t < 10 \\ \frac{20}{e} + 60 - t - \frac{20}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{10}\right) & \text{se } 10 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

- 3.1. A que distância, em quilómetros e com arredondamentos às unidades, se encontra o avião do aeroporto da Madeira às 8 horas e 5 minutos?
(A) 57 **(B)** 77 **(C)** 87 **(D)** 97
- 3.2. Justifique que a função d é contínua no ponto 10.
- 3.3. Entre as 8 horas e 10 minutos e as 8 horas e 20 minutos (exclusive), houve um instante em que a distância foi máxima.
 Determine, analiticamente, esse instante.
 Apresente o resultado em minutos e segundos.

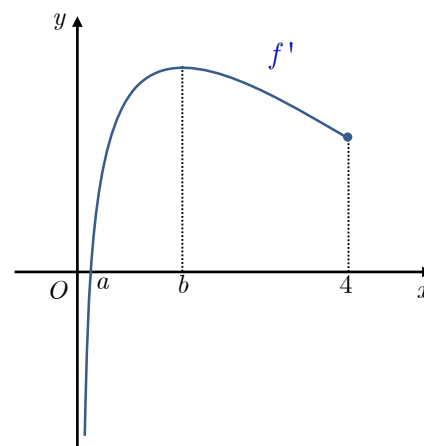
4. Considere, na figura ao lado, o gráfico da função f' , de domínio $]0, 4]$, primeira derivada de uma função f , de domínio $[0, 4]$.

Tal como é sugerido pela figura:

- a é uma raiz de f' ;
- b é um maximizante de f' ;

Qual é a afirmação necessariamente verdadeira?

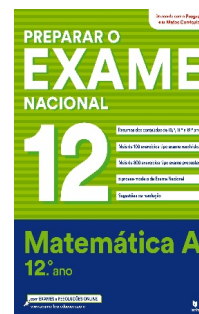
- (A)** $x = 0$ é a equação de uma assíntota do gráfico de f .
(B) a é um maximizante de f .
(C) A reta tangente ao gráfico de f no ponto b tem declive 0.
(D) $(b, f(b))$ são as coordenadas de um ponto de inflexão do gráfico de f .



5. Considere a função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = \ln x \times \cos x$. Considere $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que, $b = 2a \Rightarrow g(b) = 4g(a)$. Sabe-se que, no intervalo $]0, 3]$, existem apenas dois valores de a nessas condições. Recorrendo à calculadora gráfica, determine esses valores.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- determine os valores pedidos, com arredondamento às centésimas.



6. Considere, no plano complexo da figura, o triângulo $[OPQ]$.

Sabe-se que:

- o ponto P é a imagem geométrica do complexo $z = |z|e^{i\frac{k\pi}{5}}$, sendo k um número racional;
- o ponto Q é a imagem geométrica do complexo $w = z^2$;
- o triângulo $[OPQ]$ é retângulo em O .

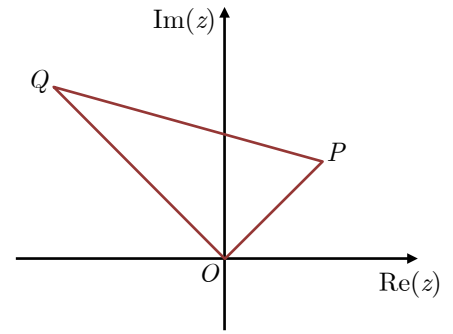
Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{5}{4}$

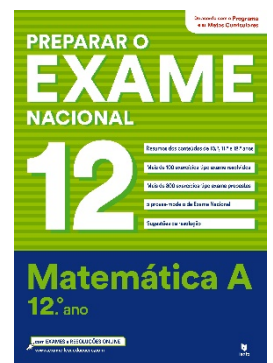
(B) $-\frac{1}{3}$

(C) $-\frac{2}{3}$

(D) $\frac{5}{2}$



FIM DO CADERNO 1



COTAÇÕES (Caderno 1)

Item									
Cotação (em pontos)									
1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	5.	6.	
13	13	13	8	13	13	8	13	8	102

Formulário

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Complexos

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

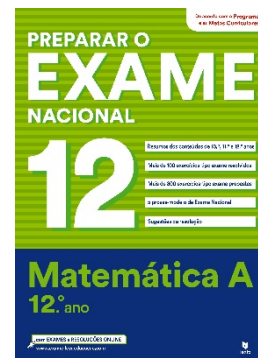
$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$



Caderno 2: 60 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

7. Considere o desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{18}$, com $x \neq 0$.

Um dos termos desse desenvolvimento é da forma kx^4 .

Qual é o valor de k ?

(A) ${}^{18}C_7$

(B) ${}^{18}C_8$

(C) ${}^{18}C_9$

(D) ${}^{18}C_{10}$

8. Em relação ao plano complexo da figura, sabe-se que:

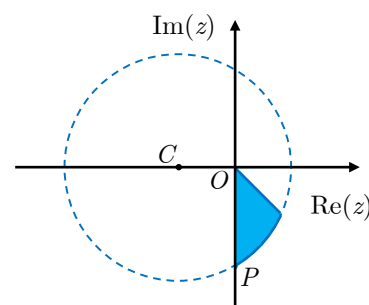
- a circunferência tem centro no ponto $C(-1,0)$ e raio 2;
- o ponto P pertence à circunferência e é a imagem geométrica do complexo $w = \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

8.1. Resolva, em \mathbb{C} , a equação $z = 3iz + \bar{w}$.

Apresente a(s) solução(ões) na forma algébrica.

8.2. Tal como a figura sugere, a zona colorida está delimitada pela circunferência, pelo semieixo negativo imaginário e pela bissetriz dos quadrantes pares.

Defina, por uma condição em \mathbb{C} , essa zona colorida (incluindo a fronteira).



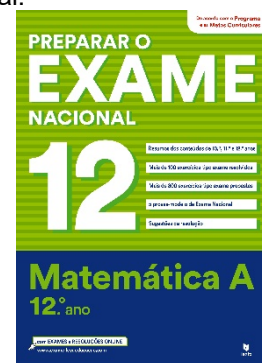
9. Considere, no conjunto dos complexos \mathbb{C} , os números $z_1 = 2i^{-11}$ e $z_2 = 3e^{i\theta}$.

Dado $z = z_1 \times z_2$, determine o(s) valor(es) de $\theta \in]-\pi, \pi]$ de modo que z seja um número real.

10. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, sejam $z = 16i$ e $w = \frac{(1-i)^2}{\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{8}\right)}$.

Seja z_1 uma das raízes quartas do complexo z .

Sabendo que o afixo de z_1 pertence, no plano complexo, ao segundo quadrante, mostre que $w = z_1$.



- 11.** Seja g uma função real, contínua em $[-1, 1]$.
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?
- (A) $\forall a \in [-1, 1], \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ (B) $\forall a \in]-1, 1[, g'(a) \in [0, 1]$
(C) A função g é majorada mas não minorada. (D) A função g é minorada mas não majorada.
- 12.** Para um certo número real k , seja f a função, contínua em \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-2x} + k & \text{se } x < 2 \\ \ln(3e^x - 2e^2) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.
- 12.1.** Qual é o valor de k ?
(A) $2 + e^{-4}$ (B) $2 - e^{-4}$ (C) $\ln 2 + 3e$ (D) $\ln 2 - 3e$
- 12.2.** O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$, paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.
Determine a sua equação.
- 12.3.** Resolva, no intervalo $] -\infty, 2[$, a equação $f'(x) + f''(x) - e^x = 0$.

FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item									
Cotação (em pontos)									
7.	8.1.	8.2.	9.	10.	11.	12.1.	12.2.	12.3.	
8	13	9	13	13	8	8	13	13	98
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)									200

