Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2018/2019)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6

2.º Período | 20/03/19 | Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Caderno 1: 45 minutos
(é permitido o uso de calculadora)

1. Num saco, estão nove bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9.

Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as nove bolas do saco, uma de cada vez.

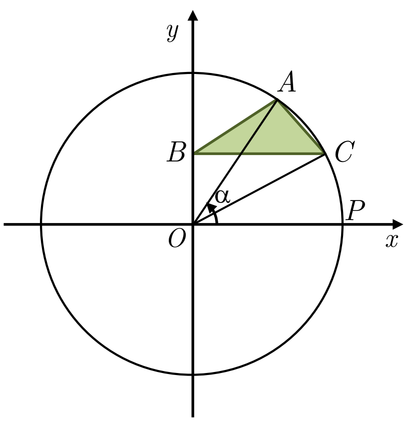
1.1. De quantas maneiras podem ser extraídas as bolas se as primeiras duas tiverem um algarismo par?

(A) $30\,240$ **(B)** $45\,360$ **(C)** $60\,480$ **(D)** $120\,960$

1.2. Qual é a probabilidade de as bolas com um algarismo divisor de 9 saírem consecutivamente?

(A) $\frac{1}{84}$ **(B)** $\frac{1}{50}$ **(C)** $\frac{1}{24}$ **(D)** $\frac{1}{12}$

2. Considere, na circunferência trigonométrica da figura, o triângulo $[ABC]$ e o ponto P.



Tal como a figura sugere:

- o ponto A pertence à circunferência e ao primeiro quadrante;
- o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy e ao interior da circunferência;
- o ponto C pertence à circunferência e tem a mesma ordenada que B;
- o ponto P tem coordenadas $(1,0)$;
- os ângulos POC e COA são geometricamente iguais.

Seja α a amplitude do ângulo POA $\left(\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, é dada, em função de α, por:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\left[2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right]}{4}$$

3. Após uma epidemia de gripe numa cidade, as autoridades de saúde implementaram um plano de combate ao vírus e o número de pessoas infetadas começou a diminuir.

Admita que a percentagem de pessoas infetadas pela gripe, t dias após o início do plano das autoridades de saúde, é dada, aproximadamente, por

$$g(t) = 3e^{-0,08t}\ ,\ t \in [0,30]$$

Determine quantos dias se passaram, desde o início da implementação do plano das autoridades, até a percentagem de pessoas infetadas chegar aos 2%.

Na sua resposta:

- utilize o teorema de Bolzano-Cauchy para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre os 3 dias e uma semana após o início do plano das autoridades de saúde, em que a percentagem de pessoas infetadas foi de 2%;
- determine, analiticamente, com arredondamento às décimas, o número pedido.

Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x\,\text{sen}(5x) + \dfrac{\cos(5x)}{5}$.

Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos no intervalo $\left[-\frac{\pi}{5}, 0\right[$.

Na sua resposta, deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função f é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função f é decrescente;
- os valores de x para os quais a função f tem extremos relativos, caso existam.

5. É dada a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{x^4}{e^x}$.

Considere, no referencial o.n. xOy da figura, a parte do gráfico de h em $]-2,5]$ e os pontos A e B.

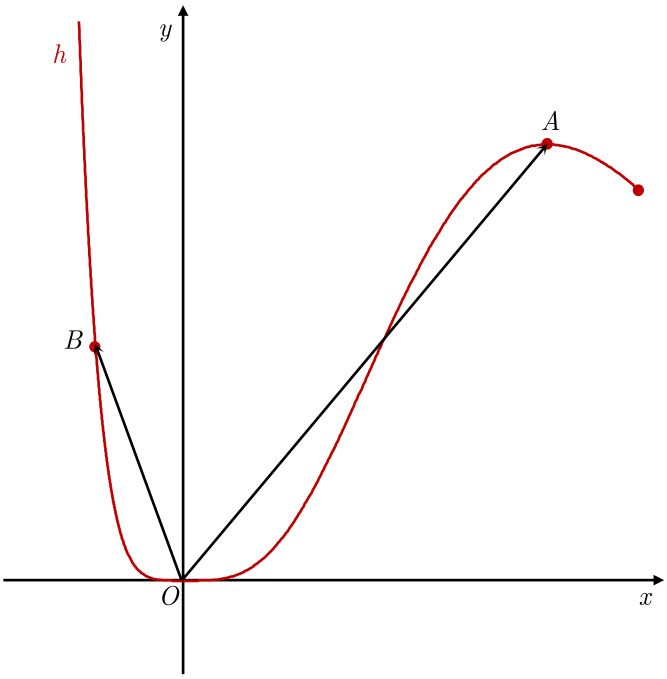
Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de h e a sua ordenada é um máximo relativo;
- o ponto B pertence ao gráfico de h e tem abcissa negativa.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa do ponto B de modo que se tenha $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

Na sua resposta, deve:

- determinar as coordenadas do ponto A com, no máximo, uma casa decimal;
- apresentar a equação, em ordem à abcissa x do ponto B, a resolver na calculadora;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- determinar a abcissa x de B, com arredondamento às centésimas.



FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	
8	8	21	21	21	21	**100**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

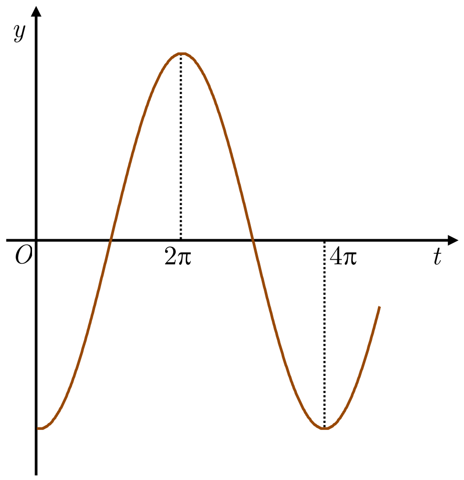
$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Caderno 2: 45 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

6. Considere, na figura do lado, a representação gráfica do movimento de um oscilador harmónico x no intervalo $[0{,}15]$, sendo que $x(t) = 4\cos(\omega t + \pi)$.



Tal como é sugerido pela figura:

• 2π é um maximizante da função x;

• 4π é um minimizante da função x.

Quais são os valores da pulsação ω e da frequência f deste oscilador harmónico?

(A) $\omega = \frac{1}{2} \wedge f = \frac{1}{4\pi}$

(B) $\omega = \frac{1}{2} \wedge f = \frac{1}{2\pi}$

(C) $\omega = 2 \wedge f = \frac{1}{2\pi}$

(D) $\omega = 2 \wedge f = \frac{1}{4\pi}$

7. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \ln x$.

Considere também a sucessão de termo geral $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n-5}\right)^n$.

Qual é o valor de $\lim h(a_n)$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** $+\infty$

8. Considere a função g, contínua em $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+2}+3x+5}{x+2} + k & \text{se } x < -2 \\ \frac{x^2-4}{e^{x+3}} + 3 & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$, sendo $k \in \mathbb{R}$.

8.1. Determine k.

8.2. Estude a função g quanto à existência de:

• assíntotas verticais do seu gráfico;

• assíntotas horizontais do seu gráfico quando $x \to +\infty$.

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_2 x$.

9.1. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$f(x) \leq \log_2(1-x) - 3$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

9.2. Considere a função g, de domínio $]1,+\infty[$, definida por $g(x) = x\log_4(x-1) + \frac{x}{2}$.

Qual é o conjunto-solução da equação $(g \circ f)(x) = 0$?

(A) $\{2\sqrt{2}\}$ **(B)** $\{0, 2\sqrt{2}\}$ **(C)** $\{0, 4^{\sqrt{2}}\}$ **(D)** $\{4^{\sqrt{2}}\}$

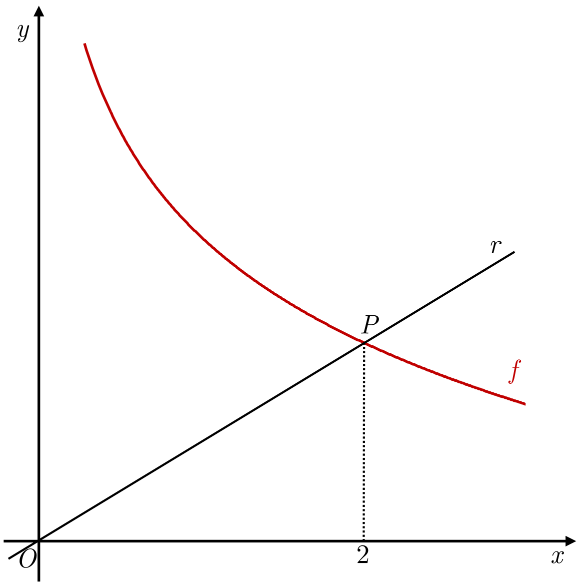
10. Seja a um número real positivo.

Considere, no referencial o.n. xOy da figura:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_3\left(\frac{a}{x}\right) + 1$;
- a reta r, de declive positivo e que passa na origem do referencial e no ponto P de abcissa 2.

Mostre que o declive da reta r é igual a:

$$\log_9\left(\frac{3a}{2}\right)$$



FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
6.	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	
8	8	21	17	21	8	17	**100**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)							**200**