

2.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6

1.º Período

28/11/18

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

--	--	--

O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

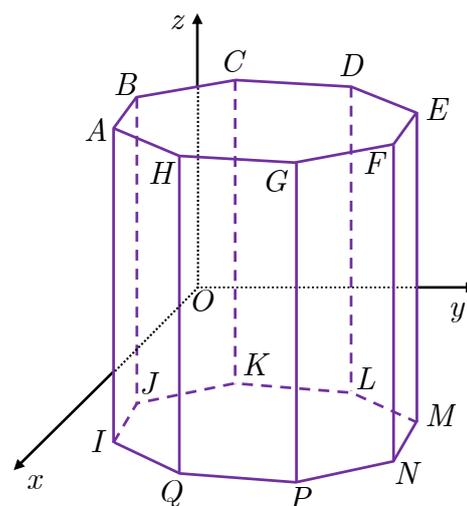
Caderno 1: 50 minutos (é permitido o uso de calculadora)

1. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma octogonal regular $[ABCDEFGHJKLMNPQ]$, de bases paralelas ao plano xOy .

Considere uma urna com 16 bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma inscrita com uma letra relativa a cada vértice do prisma. Extraem-se, uma de cada vez e ao acaso, todas as bolas da urna.

Qual é a probabilidade, com seis casas decimais, de as letras das bases do prisma saírem consecutivamente?

- (A) 0,000078 (B) 0,000155
(C) 0,000015 (D) 0,000229



2. Sobre uma empresa de condomínios, sabe-se que:

- um quinto dos clientes pagou a quota de 2018;
- um quarto dos clientes que pagaram a quota de 2018 representam espaços comerciais;
- um sexto dos clientes que representam espaços comerciais pagaram a quota de 2018.

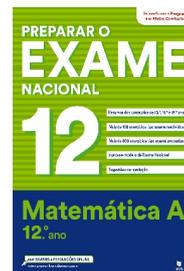
Escolhe-se um qualquer cliente da empresa de condomínios.

Considere os acontecimentos seguintes.

Q : «O cliente pagou a quota de 2018.»

E : «O cliente representa um espaço comercial.»

Calcule, na forma de percentagem, $P(E)$.



3. 3.1. Num espaço de probabilidades $(E, \mathcal{P}(E), P)$, sejam $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que:

- $0 < P(B) < 1$;
- $P(A) = 2P(B)$.

Prove que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(B)[3 - P(A | B)] = 1$

3.2. 3.2.1. Sobre os jogadores de futebol que passaram aos oitavos de final no campeonato do mundo de 2018 (disputado na Rússia), sabe-se que:



- o número de jogadores europeus era o dobro do número de jogadores cuja língua oficial do país era o espanhol;
- o número de jogadores europeus ou cuja língua oficial do país era o espanhol era catorze vezes o número de jogadores europeus cuja língua oficial do país era o espanhol.

Escolhe-se, ao acaso, um dos futebolistas participantes nos oitavos de final do campeonato.

Determine a probabilidade de ele ser europeu sabendo que a língua oficial do seu país é o espanhol.

Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em 3.1.. Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B , no contexto da situação apresentada.

3.2.2. Suponha que, no início de um jogo, estavam 22 jogadores em campo, tendo 12 deles nascidos na Europa e 6 no Brasil.

Considere a experiência de se escolherem, ao acaso, 4 dos 22 jogadores.

Sejam X e Y os acontecimentos:

X : «Pelo menos 3 dos jogadores escolhidos nasceram no Brasil.»

Y : «Pelo menos um dos 4 jogadores escolhidos nasceram na Europa.»

Determine, sem usar a fórmula da probabilidade condicionada, o valor de $P(X | \overline{Y})$.

Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(X | \overline{Y})$ no contexto da situação descrita.

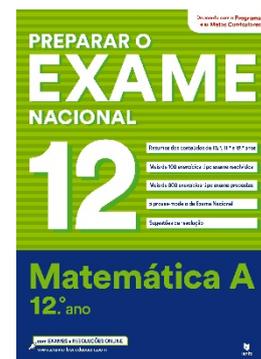
4. Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-9000}{\sqrt{4n+5000}}$?

(A) $+\infty$

(B) $-\infty$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{3}{4}$



5. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = 2x^3 + 4x$.

5.1. Mostre, usando a definição de derivada num ponto, que $g'(-1) = 10$.

5.2. Verifique que a equação $g(x) = 3\sqrt{6}x^2 + 4x - 6\sqrt{6}$ é possível em $] -2, 3[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a(s) solução(ões) desta equação, neste intervalo, arredondada(s) às centésimas.

Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

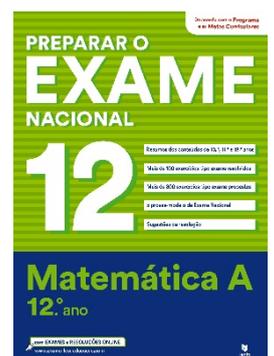
Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano-Cauchy para provar que a equação $g(x) = 3\sqrt{6}x^2 + 4x - 6\sqrt{6}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $] -2, 3[$;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a(s) solução(ões) pedida(s).

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.	2.	3.1.	3.2.1.	3.2.2.	4.	5.1.	5.2.	
8	16	16	20	16	8	16	20	120



Formulário

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

Caderno 2: 40 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

6. Sejam $(E, \mathcal{F}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{F}(E)$ tais que:

- $P(A) = 0,5$;
- $P(A \cup B) = 0,7$;
- $P(A \cap \bar{B}) = 0,3$.

6.1. Qual é o valor da probabilidade de não ocorrer B se não ocorrer A ?

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{2}{7}$

6.2. Averigue se os acontecimentos A e B são independentes.

7. Considere as sucessões definidas por $a_n = \frac{100-n^2}{200+3n}$, $b_n = \left(\frac{n}{2n+500}\right)^n$ e $c_n = \sqrt[n]{4 + \frac{300}{n}}$.

Considere ainda as sucessões (u_n) e (v_n) tais que, a partir de determinada ordem, se tem $u_n \leq a_n \leq b_n \leq v_n \leq c_n$.

Qual é a proposição verdadeira?

- (A) $\lim v_n = 0$ (B) $\lim v_n = 1$ (C) $\lim u_n = +\infty$ (D) $\lim u_n = -\infty$

8. Usando o teorema das sucessões enquadradas, calcule $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4n+1}{5n^2+k}$.

9. Considere a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, definida por $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$.

9.1. Quanto ao valor de $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left[f(x) + \cos\left(\frac{1}{x+3}\right) \right]$:

- (A) Não existe; (B) É igual a 0; (C) É igual a $+\infty$; (D) É igual a $-\infty$.

9.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -2 .

FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item						
Cotação (em pontos)						
6.1.	6.2.	7.	8.	9.1.	9.2.	
8	16	8	20	8	20	80
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)						200

