Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano
Proposta de teste de avaliação [janeiro – 2019]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Numa unidade de saúde há uma equipa constituída por sete médicos: quatro homens e três mulheres, entre eles um casal, a Sílvia e o Gustavo.

1.1. Para a escala de fim de semana vão ser escolhidos, ao acaso, três membros da equipa.
A probabilidade, arredondada às milésimas, de pelo menos um dos membros do casal ser escolhido é:

(A) 0,286 **(B)** 0,571 **(C)** 0,714 **(D)** 0,857

1.2. Para tirar uma fotografia, a equipa de médicos vai dispor-se lado a lado, formando uma sequência de sete elementos, como é sugerido pela figura.
Determina o número de sequências diferentes que é possível formar, de modo que os membros do casal fiquem juntos.

2. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, sendo A o único ponto de inflexão do gráfico de f.
Sabe-se que a função f', derivada de f, é definida por $f'(x) = 4x - e^x$.

2.1. O valor da abcissa de A, arredondada às centésimas, é:

(A) 1,39 **(B)** 0,36 **(C)** 2,15 **(D)** 1,55

2.2. Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x^2 - 4x} = k$.

Indica a afirmação verdadeira.

(A) $-10 < k < -9$ **(B)** $8 < k < 9$

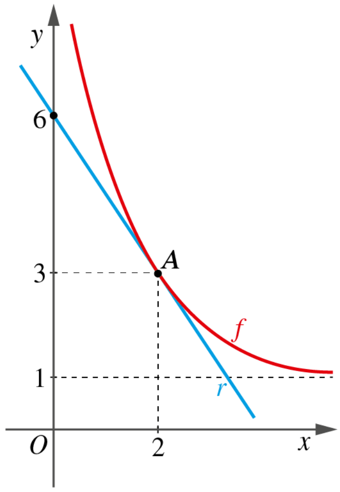
(C) $-39 < k < -38$ **(D)** $10 < k < 11$

3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

. a reta r é tangente ao gráfico no ponto $A(2,3)$ e interseta Oy no ponto de coordenadas $(0, 6)$;

. a reta $y=1$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.



3.1. O valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-f(x)}{x}$ é:

(A) $+\infty$ **(B)** 2 **(C)** 0 **(D)** 3

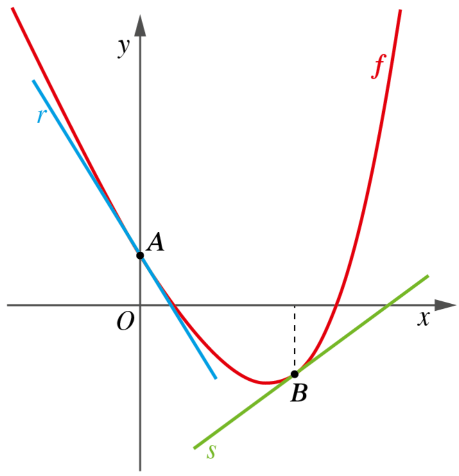
3.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=x^2-\sqrt{f(x)}$.

Calcula $g'(2)$ e apresenta o resultado arredondado às centésimas.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\sqrt{e^x}-2x$$

Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representadas as retas r e s e o gráfico da função f.



Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto A, interseção do gráfico de f com o eixo Oy;
- a reta s é perpendicular à reta r e é tangente ao gráfico de f no ponto B.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto B.

Na tua resposta deves apresentar:

- uma expressão da derivada da função f;
- a reta r, na forma de equação reduzida;
- a relação entre os declives das retas r e s;
- a resolução gráfica da equação cuja solução é a abcissa de B;
- o valor da abcissa de B, arredondado às centésimas.

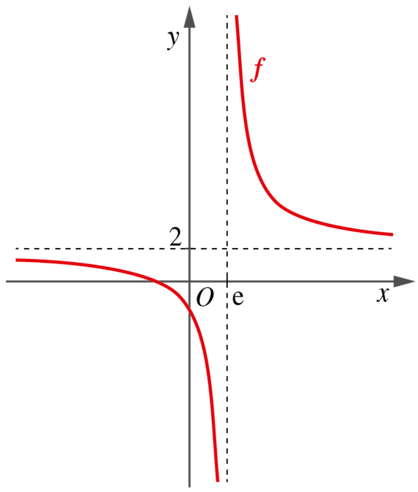
FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões – Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	
Pontos	12	15	12	12	12	15	17	**95**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

5. Na figura, em referencial o.n. *Oxy*, está representada uma função racional f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{e\}$.

Sabe-se que as retas $y=2$ e $x=e$ são assíntotas ao gráfico de f.



Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Por observação da representação gráfica, o $\lim f(u_n)$ é:

(A) 2 **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

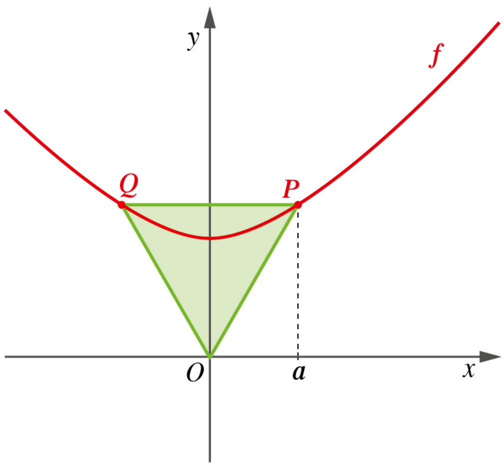
6. Considera a função f par, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

6.1. Determina, na forma reduzida, as equações das assíntotas ao gráfico de f.

6.2. Na figura abaixo está representada parte do gráfico de f e o triângulo $[OPQ]$.

Sabe-se que:

- P e Q pertencem ao gráfico de f;
- a é a abcissa de P, com $a>0$;
- a reta PQ é paralela a Ox.

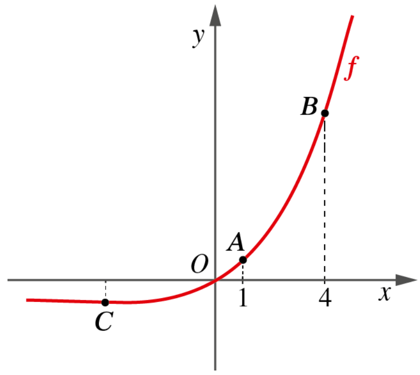


Seja g a função que a cada valor de a faz corresponder a área do triângulo $[OPQ]$.

a) Mostra que $g(a)=a\sqrt{a^2+4}$.

b) Mostra que existe um valor de $a\in\left]1,2\right[$ tal que o valor da medida da área do triângulo é $\sqrt{28}$.

7. Na figura está representada a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$.



7.1. Os pontos A e B pertencem ao gráfico de f e as abcissas são, respetivamente, 1 e 4.

Considera a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n=\left(\frac{n+k}{n+2}\right)^n$, $k\in\mathbb{R}$.

Sabe-se que $\lim(u_n)=f(1)\times f(4)$. Então, o valor de k é:

(A) $\frac{5}{4}$ **(B)** $\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$ **(C)** $\frac{13}{4}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

7.2. O ponto C de abcissa c pertence ao gráfico de f.

Sabendo que $f(c)$ é mínimo absoluto da função f, determina as coordenadas do ponto C.

8. Considera as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=4^{x+1}-\frac{1}{2}$ e $g(x)=2^x$.

8.1. Resolve a inequação $f(x)\le 0$.
Apresenta a solução na forma de intervalo de números reais.

8.2. Resolve a equação $f(x)=g(x)$.

9. Seja k um número real e f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{2x} & \text{se } x>0\\ 4^k & \text{se } x=0\\ \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}{2} & \text{se } x<0\end{cases}$$

Verifica se existe k de modo que a função f seja contínua no ponto de abcissa 0.

FIM (Caderno 2)

Cotações										Total
Questões – Caderno 2	**5.**	**6.1.**	**6.2. a)**	**6.2. b)**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	
Pontos	12	12	10	12	12	15	10	10	12	**105**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1

1.

1.1. Considere-se o acontecimento A: "pelo menos um dos membros do casal é escolhido"

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{{}^5C_3}{{}^7C_3} = 1 - \frac{10}{35} \approx 0,714$$

Resposta: Opção **(C)** 0,714

1.2. Seja n o número de sequências diferentes que é possível formar.

$n = 6! \times 2! = 1440$

$6!$: permutações do casal juntamente com os restantes elementos.

$2!$: permutações entre os elementos do casal.

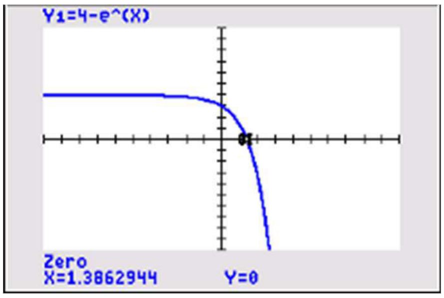
Resposta: Podem formar-se 1440 sequências diferentes.

2.

2.1. $f'(x) = 4x - e^x$

$f''(x) = 4 - e^x$

Observando uma representação gráfica de f'', identifica-se o valor arredondado do seu zero, observando que há mudança de sinal.



$x \approx 1,39$

Resposta: Opção **(A)** 1,39

2.2. $k = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x^2 - 4x} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x(x-4)} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x} \times \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4} =$

$= \dfrac{1}{4} \times f'(4) = \dfrac{1}{4} \times (16 - e^4) \approx -9,650$

Resposta: Opção **(A)** $-10 < k < -9$

3.

3.1. Como a reta $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$, o seu declive é 0.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{f(x)}{x}\right) = 3 - \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 3 - 0 = 3$$

Resposta: Opção **(D)** 3

3.2. $g(x) = x^2 - \sqrt{f(x)}$

$$g'(x) = 2x - \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Atendendo a que a reta r passa pelos pontos (2, 3) e (0, 6) e designando por m o seu declive, tem-se $m = \frac{6-3}{0-2} = -\frac{3}{2}$. Então, $f'(2) = -\frac{3}{2}$.

$$g'(2) = 4 - \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = 4 - \frac{-\frac{3}{2}}{2\sqrt{3}} = 4 + \frac{3}{4\sqrt{3}} = 4 + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{16+\sqrt{3}}{4} \approx 4,43$$

Resposta: $g'(2) \approx 4,43$

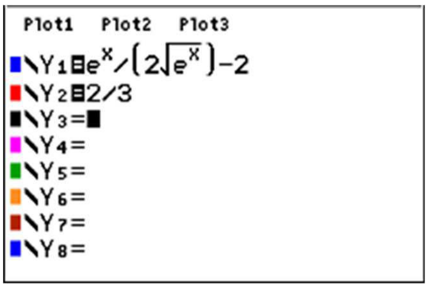
4. $f(x) = \sqrt{e^x} - 2x$

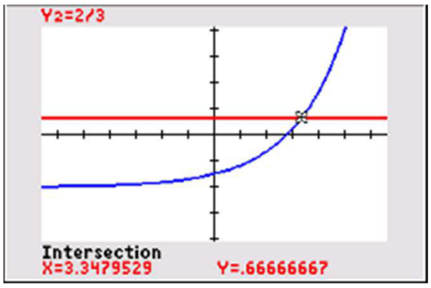
$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} - 2$$

Sejam m_r e m_s os declives das retas r e s, respetivamente.

$$m_r = f'(0) = \frac{e^0}{2\sqrt{e^0}} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$, pelo que $m_s = -\frac{1}{m_r} = \frac{2}{3}$.

Então, resolvendo a equação $f'(x) = \frac{2}{3}$ graficamente, obtém-se:





$x \approx 3,35$

Resposta: A abcissa do ponto B é, aproximadamente, 3,35 .

FIM (Caderno 1)

CADERNO 2

5. $\lim u_n = \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Sabe-se que (u_n) é crescente, logo $u_n \to \mathrm{e}^-$. Então, $\lim f(u_n) = -\infty$.

Resposta: Opção **(D)** $-\infty$

6.

6.1. Como o domínio de f é $\mathbb{R}$ e a função é contínua, uma vez que se trata de uma função irracional, então não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

Seja $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Quando $x \to +\infty$, o gráfico de f admite a assíntota de equação $y = x$.

Repetindo o processo quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right) = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+4}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Quando $x \to -\infty$, o gráfico de f admite a assíntota de equação $y = -x$.

Resposta: As assíntotas ao gráfico de f são definidas pelas equações $y = x$ e $y = -x$.

6.2. **a)** Como a função f é par, a abcissa do ponto Q é $-a$. Então, $\overline{QP} = 2a$.

$$g(a) = \frac{2a \times f(a)}{2}\text{, isto é, } g(a) = \frac{2a \times \sqrt{a^2+4}}{2} \Leftrightarrow g(a) = a \times \sqrt{a^2+4}\,.$$

b) A função g definida por $g(x) = x\sqrt{x^2+4}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua no intervalo $[1, 2]$.

$g(1) = \sqrt{5}$ e $g(2) = 2\sqrt{2^2+4} = 2\sqrt{8} = \sqrt{32}$

Como $5 < 28 < 32$, então $\sqrt{5} < \sqrt{28} < \sqrt{32}$.

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists a \in \,]1, 2[: g(a) = \sqrt{28}$.

7.

7.1. $$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{n+k}{n+2}\right)^n = \lim\left(\frac{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^n = \lim\left(\frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^n = \frac{\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{\mathrm{e}^k}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{k-2}$$

$$\mathrm{e}^{k-2} = f(1) \times f(4) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{k-2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} \times 2\mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{k-2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}+1} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{k-2} = \mathrm{e}^{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow k-2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow k = \frac{13}{4}$$

Resposta: Opção **(C)** $\frac{13}{4}$

7.2. $f(x) = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{4}} + \frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} + \frac{x}{8}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{8}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = \frac{4+x}{8}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4+x}{8}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = 0 \Leftrightarrow 4+x = 0 \;\vee\; \mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

x	$-\infty$	-4	$-\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{\mathrm{e}}$	↗

$f(-4) = -2\mathrm{e}^{-1} = -\frac{2}{\mathrm{e}}$

Resposta: $C\left(-4, -\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$

8.

8.1. $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 4^{x+1} - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 2^{2(x+1)} \leq 2^{-1} \Leftrightarrow 2x+2 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$

$x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$

Resposta: O conjunto-solução é $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

8.2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4^{x+1} - \frac{1}{2} = 2^x \Leftrightarrow 4 \times 4^x - \frac{1}{2} = 2^x \Leftrightarrow 4 \times \left(2^x\right)^2 - 2^x - \frac{1}{2} = 0$

Seja $2^x = y$.

$4y^2 - y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 8y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{16} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{4}$

$2^x = \frac{1}{2} \vee \underbrace{2^x = -\frac{1}{4}}_{\text{cond. impossível}} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

Resposta: $S = \{-1\}$

9. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x\left(e^x - 1\right)}{2x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{2} \times \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(0) = 4^k$

Para a função ser contínua no ponto de abcissa 0, deve verificar-se:

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$4^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{2k} = 2^{-1} \Leftrightarrow 2k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

Resposta: O valor de k é $-\frac{1}{2}$.

FIM (Caderno 2)