TESTE GLOBAL – 11.º ANO

NOME: ____ **N.º:** ___ **TURMA:** ___ **ANO LETIVO:** _____/_____

AVALIAÇÃO: __________________ **PROFESSOR:** ________________ **ENC. EDUCAÇÃO:** ___________________

DURAÇÃO DO TESTE: 90 MINUTOS

O teste é constituído por dois grupos. O Grupo I é constituído por itens de escolha múltipla e o Grupo II é constituído por itens de construção.

GRUPO I

Este grupo é constituído por itens de escolha múltipla.
Para cada item, seleciona a opção correta.

1. Considera, num referencial ortonormado $Oxyz$, o plano α, definido por $3x - z = 0$, e a reta r, definida por $(x, y, z) = (0,0,0) + k(1,2,3), k \in \mathbb{R}$.

Qual é a interseção da reta r com o plano α?

(A) É o ponto de coordenadas $(0,2,3)$.

(B) É o ponto coordenadas $(0,0,0)$.

(C) É o conjunto vazio.

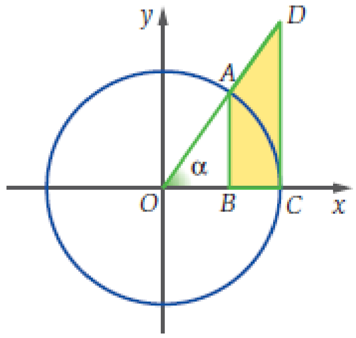
(D) É a reta r.

Adaptado de *Teste Intermédio de Matemática A*, 11.º ano, 2010.

2. Na figura ao lado está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox;
- o ponto C tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$;
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos ao eixo Oy;



Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $\dfrac{\tan\alpha}{2} - \sin\alpha \times \cos\alpha$

(B) $\dfrac{\tan\alpha - \sin\alpha \times \cos\alpha}{2}$

(C) $\tan\alpha - \sin\alpha \times \cos\alpha$

(D) $\tan\alpha - \dfrac{\sin\alpha \times \cos\alpha}{2}$

Banco de itens do Ensino Secundário, IAVE.

3. Seja a um número real. Considera a sucessão (u_n) definida por

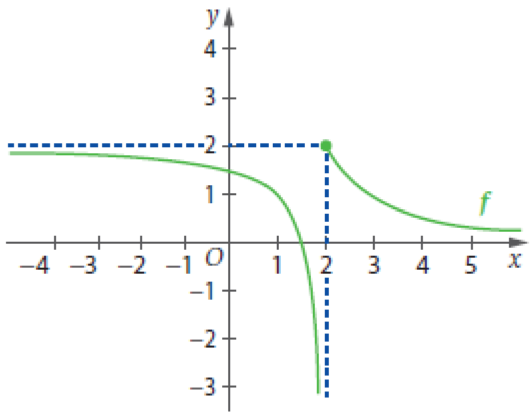
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3u_n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $6a+4$ **(B)** $9a-4$ **(C)** $6a-4$ **(D)** $9a+4$

Banco de itens do Ensino Secundário, IAVE.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente no referencial da figura, e seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim f(u_n) = 2$.



Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $2 - \dfrac{1}{n}$

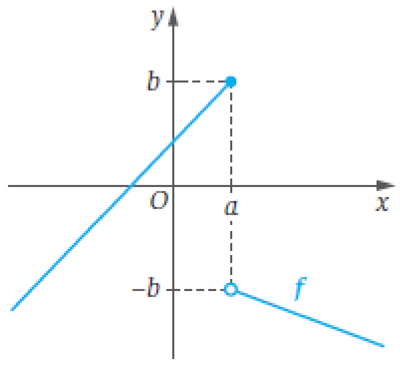
(B) $\dfrac{1}{n} - 2$

(C) $2 + \dfrac{1}{n}$

(D) $n + 2$

5. Considera a função f, cujo gráfico está representado na figura.

Qual das afirmações é verdadeira?



(A) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

(B) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -b$

(C) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

(D) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

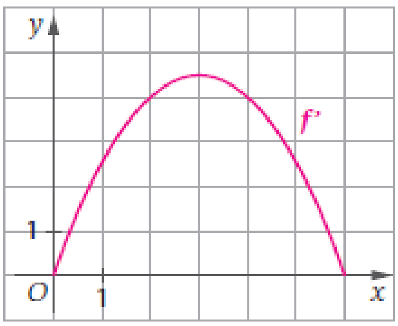
6. Um ponto Q desloca-se na reta numérica r, de acordo com a função posição definida por $p(t) = 3t - 1$, com $t \in [0, 10]$, em segundos.

Qual é a abcissa do ponto em que se localiza Q no final do deslocamento?

(A) -1 **(B)** 3 **(C)** 10 **(D)** 29

7. No referencial da figura ao lado está o gráfico da função f' (função derivada de uma função f).

Qual das afirmações é verdadeira?



(A) $f(4) < f(1)$

(B) $f(4) < f(3)$

(C) $f(4) > f(5)$

(D) $f(4) > f(2)$

8. A reta de equação $x-2y+6=0$ é assíntota oblíqua ao gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$.

Seja g a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $g(x)=\frac{x}{f(x)}$.

O gráfico de g tem uma assíntota horizontal. Qual das equações seguintes define essa assíntota?

(A) $y=\frac{1}{3}$ **(B)** $y=\frac{1}{2}$ **(C)** $y=2$ **(D)** $y=3$

GRUPO II

Este grupo é constituído por itens de construção. Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que efetuares e todas as justificações necessárias.

9. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x)=x^2-5x+2$ e a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4.

Determina as coordenadas do ponto do gráfico de f cuja respetiva reta tangente é perpendicular a r.

10. Seja g a função real de variável real definida por $g(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

10.1 Indica o domínio de g.

10.2 Estuda a função g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

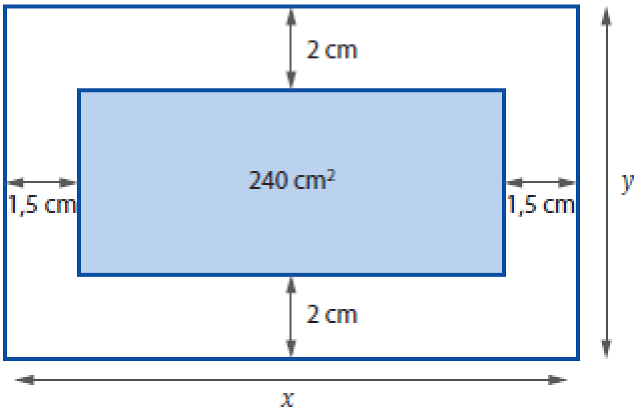
11. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica E, de equação

$$x^2+y^2+(z-2)^2=4.$$

Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, o ponto P, de coordenadas $(\tan\alpha,\ \sin\alpha, 2+\cos\alpha)$, pertence à superfície esférica E.

Determina os valores numéricos das coordenadas do ponto P.

12. Um livro vai ser impresso em folhas retangulares.
A zona de impressão ocupa 240 cm^2 de área, na parte central de cada folha.
São deixadas margens como se mostra na figura seguinte.



Seja x o comprimento da folha e y a altura, ambos em centímetros.

12.1 Mostra que a área total de uma folha, é dada, em cm^2, em função de x, por:

$$A(x)=\frac{228x+4x^2}{x-3}$$

12.2 Justifica que o domínio da função A, atendendo ao contexto do problema, é o intervalo $]3,+\infty[$.

12.3 Determina as dimensões exatas de cada folha, para que a sua área seja de 360 cm^2.

12.4 Calcula o comprimento da folha (x) de modo que a sua área total seja a menor possível.

Apresenta o valor em centímetros, arredondado às décimas.

13. Calcula, caso existam:

13.1 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|2x-4|}{x^2-4}$

13.2 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3\sqrt{x}-x}{3x-\sqrt{x}}$

14. Considera, em referencial ortonormado $Oxyz$, o ponto $P(0,4,3)$.

14.1 Seja α o plano que contém o ponto P e é perpendicular à reta de equação vetorial

$$(x,y,z)=(0,1,-3)+k(1,0,2),\ k\in\mathbb{R}.$$

Determina a área da figura que resulta da interseção do plano α com a esfera definida pela condição $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\leq 3$.

Sugestão:

- determina uma equação do plano α;
- mostra que o centro da esfera pertence ao plano α;
- atendendo ao ponto anterior, determina a área da interseção resultante.

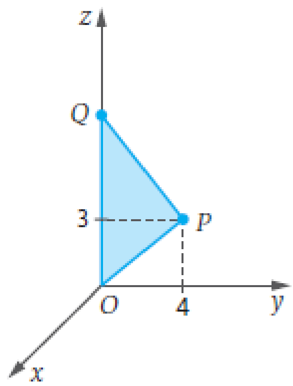
14.2 Admite que um ponto Q se desloca ao longo do semieixo positivo Oz, nunca coincidindo com a origem O do referencial.

Seja f a função que faz corresponder à cota z do ponto Q o perímetro do triângulo $[OPQ]$.

a. Mostra que $f(z)=z+5+\sqrt{z^2-6z+25}$

b. Determina a cota do ponto Q de modo que o perímetro do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 16.

c. Mostra que f é uma função estritamente crescente e interpreta esse facto no contexto da situação.



Adaptado de *Teste Intermédio de Matemática A*, 11.º ano, 2007.

FIM

RESOLUÇÕES

GRUPO I

1. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}_\alpha(3,0,-1)$; um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1,2,3)$;

$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{r} = 3\times1+0\times2+(-1)\times3=0$; logo, o vetor normal ao plano é perpendicular ao vetor diretor da reta, pelo que a reta é paralela ao plano ou está contida no plano; portanto, a interseção é o conjunto vazio ou a reta r.

Substituindo as coordenadas de um ponto da reta, por exemplo, $(0,0,0)$, na equação do plano, obtém-se uma proposição verdadeira. Logo, a reta está contida no plano.

Opção correta: (D)

2. $A_{[ABCD]} = A_{[OCD]} - A_{[OBA]}$

$\overline{OB}=\cos\alpha$; $\overline{BA}=\sin\alpha$; $\overline{OC}=1$; $\overline{CD}=\tan\alpha$. Portanto:

$$A_{[ABCD]} = \frac{1\times\tan\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha\times\cos\alpha}{2} = \frac{\tan\alpha-\sin\alpha\times\cos\alpha}{2}$$

Opção correta: (B)

3. $u_1=a$; $u_2=-3u_1+2=-3a+2$; $u_3=-3u_2+2=-3(-3a+2)+2=9a-4$.

Opção correta: (B)

4. $\lim f(u_n)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=2 \Leftrightarrow a=2^+$; portanto, $u_n\to2^+$, tendo-se $2+\frac{1}{n}\to2^+$.

Opção correta: (C)

5. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ é falso, porque $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-b\neq b$;

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-b$ é falso, porque $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b\neq -b$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{-\infty}=0$ é verdadeiro;

$\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ é falso, porque $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{b}$ e porque $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{f(x)}=-\frac{1}{b}$.

Opção correta: (C)

6. $p(10)=3\times10-1=29$

Opção correta: (D)

7. Da análise do gráfico da derivada de f, conclui-se que f é estritamente crescente em $]0,6[$, uma vez que, nesse intervalo, $f'(x)\geq 0$.

Opção correta: (D)

8. $x-2y+6=0\Leftrightarrow 2y=x+6\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+3$, portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=2$; logo, $y=2$ é equação da assíntota horizontal ao gráfico de g.

Opção correta: (C)

GRUPO II

9. Determinemos a expressão da derivada da função f : $f'(x)=2x-5$.

$f'(4)$ é o valor é o declive da reta r no ponto de abcissa 4: $m_r=f'(4)=8-5=3$. Assim, o declive de uma reta perpendicular a r é $-\frac{1}{3}$.

Determinemos agora as coordenadas do ponto do gráfico de f cuja reta tangente tem declive $-\frac{1}{3}$:

$$f'(x)=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2x-5=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 6x-15=-1\Leftrightarrow x=\frac{14}{6}=\frac{7}{3} \quad ; \quad f\left(\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{7}{3}\right)^2-5\times\frac{7}{3}+2=-\frac{38}{9}$$

Coordenadas pedidas: $\left(\frac{7}{3},-\frac{38}{9}\right)$

10.1 $D_g=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

10.2 Como a função é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, caso existam assíntotas verticais, terão equações $x=-1$ ou $x=1$. Confirmemos:

$\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$, o que confirma que $x=-1$ é a equação de uma assíntota vertical (bilateral).

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$, o que confirma que $x=1$ é a equação de uma assíntota vertical (bilateral).

Quanto a assíntotas não verticais:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=0$; portanto, a reta de equação $y=0$ é a assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x\to-\infty$ e quando $x\to+\infty$, pelo que o gráfico não admite mais assíntotas.

11. Se o ponto $P(\tan\alpha, \sin\alpha, 2+\cos\alpha)$ pertence à superfície esférica, as respetivas coordenadas devem satisfazer a equação da superfície esférica. Portanto:

$$\tan^2\alpha + \sin^2\alpha + (2+\cos\alpha - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \tan^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2 = 4 \Leftrightarrow \tan^2\alpha + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = 3 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm\sqrt{3}$; ora, como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\tan\alpha > 0$ e, portanto, $\tan\alpha = \sqrt{3}$ e $\alpha = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$. Assim, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $2+\cos\alpha = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Concluindo, tem-se $P\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

12.1 $A = x \times y$

Para escrevermos a área da folha em função de x, temos de escrever x em função de y, o que podemos fazer a partir da área da zona de impressão:

$(x-3)(y-4) = 240 \Leftrightarrow y - 4 = \frac{240}{x-3} \Leftrightarrow y = 4 + \frac{240}{x-3}$ (para $x \neq 3$).

Então, $A = x \times y = x\left(4 + \frac{240}{x-3}\right) = 4x + \frac{240x}{x-3} = \frac{4x(x-3)+240x}{x-3} = \frac{228x+4x^2}{x-3}$

12.2 As dimensões da zona de impressão são dadas por $x-3$ e $y-4$; por isso, tem de ser $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$ e $y-4>0 \Leftrightarrow 4+\frac{240}{x-3}-4>0 \Leftrightarrow \frac{240}{x-3}>0 \Leftrightarrow x-3>0 \Leftrightarrow x>3$.

Ou seja, $D_A = \left]3, +\infty\right[$.

12.3 $\frac{228x+4x^2}{x-3} = 360 \underset{x>3}{\Leftrightarrow} 228x + 4x^2 = 360x - 1080 \Leftrightarrow 4x^2 - 132x + 1080 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \vee x = 18$.

Se $x = 15$, $y = 4 + \frac{240}{15-3} = 24$; se $x = 18$, $y = 4 + \frac{240}{18-3} = 20$; então, as dimensões exatas são 15 cm por 24 cm ou 18 cm por 20 cm.

12.4 Vamos calcular o minimizante da função:

$$\left(\frac{228x+4x^2}{x-3}\right)'=\frac{\left(228x+4x^2\right)'(x-3)-\left(228x+4x^2\right)(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{(228+8x)(x-3)-\left(228x+4x^2\right)}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{228x-684+8x^2-24x-228x-4x^2}{(x-3)^2}=\frac{4x^2-24x-684}{(x-3)^2}.$$

$$\frac{4x^2-24x-684}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow 4x^2-24x-684=0\wedge x\neq 3\Leftrightarrow 4x^2-24x-684=0\wedge x\neq 3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=3-6\sqrt{5}\vee x=3+6\sqrt{5}$$

x	3		$3+6\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	ND	—	0	+
Monotonia e extremos de f	ND	↘	Mín.	↗

Conclui-se que $x=3+6\sqrt{5}\approx 16,4$.

13.1 $2x-4$ muda de sinal em $x=2$; por isso, vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|2x-4|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-4}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{(x+2)}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|2x-4|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-2x+4}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-2}{(x+2)}=-\frac{1}{2};$$

Como os limites laterais são diferentes, concluímos que não existe $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|2x-4|}{x^2-4}$.

13.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x}-x}{3x-\sqrt{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{3\sqrt{x}}{x}-1\right)}{x\left(3-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}-1}{3-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{0-1}{3-0}=-\frac{1}{3}$

14.1 Como o plano α é perpendicular à reta, um vetor diretor da reta é um vetor normal do plano; por exemplo, o vetor de coordenadas $(1,0,2)$; assim, sabendo-se que o plano contém o ponto $P(0,4,3)$, obtêm-se uma equação do plano: $x+2(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2z=6$.

O centro da esfera tem coordenadas $(-2,1,4)$; substituindo na equação do plano obtém-se $-2+2\times 4=6 \Leftrightarrow 6=6$, o que mostra que o centro da esfera pertence ao plano.

Como o centro da esfera pertence ao plano, a região resultante da interseção do plano e da esfera é um círculo com o raio da esfera $\left(\sqrt{3}\right)$; portanto, a área pedida é $\pi\times\left(\sqrt{3}\right)^2=3\pi$.

14.2

a. $\overline{OQ}=z$; $\overline{OP}=\sqrt{0^2+4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$; $\overline{PQ}=\sqrt{4^2+(z-3)^2}=\sqrt{16+(z-3)^2}=\sqrt{z^2-6z+25}$.

Então, $f(z)=z+5+\sqrt{z^2-6z+25}$.

b. $f(z)=16 \Leftrightarrow z+5+\sqrt{z^2-6z+25}=16 \Leftrightarrow \sqrt{z^2-6z+25}=11-z \Rightarrow z^2-6z+25=(11-z)^2$
$\Leftrightarrow z^2-6z+25=121-22z+z^2 \Leftrightarrow 16z=96 \Leftrightarrow z=6$

Verificando, obtém-se $f(6)=16$, pelo que a cota do ponto Q é 6.

c. $f'(z)=\left(z+5+\sqrt{z^2-6z+25}\right)'=1+\dfrac{2z-6}{2\sqrt{z^2-6z+25}}=1+\dfrac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+25}}$

$f'(z)=0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+25}}=0 \Leftrightarrow \dfrac{z-3}{\underbrace{\sqrt{z^2-6z+25}}_{>0}}=-1 \Leftrightarrow z-3=-\sqrt{z^2-6z+25} \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2-6z+9=z^2-6z+25 \Leftrightarrow 9=25$

Portanto, f' não tem zeros. Assim, como é contínua em $\mathbb{R}^+$ é sempre positiva ou sempre negativa; verifica-se que é sempre positiva, calculando $f'(z)$ para qualquer $z\in\mathbb{R}^+$, donde se conclui que f é estritamente crescente. No contexto do problema, isto significa que quanto maior é a cota do ponto Q maior é o perímetro do triângulo $[OPQ]$.

FIM