Proposta de Resolução

GRUPO I

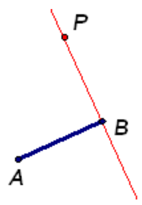
1. A reta *r* é definida por $2x = y+1 \ \wedge \ z=-5$, ou seja, $y=2x-1 \ \wedge \ z=-5$.

Os pontos de *r* são do tipo $P(k \ , \ 2k-1 \, , -5)$, $k \in \mathbb{R}$.

r: $(x,y,z)=(0,-1,-5)+k(1,2,0)$, $k\in\mathbb{R}$

Resposta: (C)

2. Uma reta perpendicular a *AB* e que passa por *B*.



Resposta: (C)

3. O plano α é representado por $5x-y+2z=7$. A reta *r* é necessariamente uma reta contida em α.

O vetor diretor da reta e o vetor $\vec{n}$ normal a α são perpendiculares e os pontos da reta pertencem ao plano.

$\vec{n}=(5,-1,2)$

Atendendo às opções, verifica-se que $(5,-1,2).(2,4,-3)=10-4-6=0$

Para além desta condição todos os pontos da reta devem pertencer ao plano.

No caso da opção *A*, o ponto $(0,-1,3)$ pertence à reta e ao plano pois $5\times 0-(-1)+2\times 3=7$ é verdadeiro.

Note-se que nas outras opções não se verificam simultaneamente as duas condições.

Resposta: (A)

4. O vetor $\overrightarrow{CV}$ é normal ao plano da base do cone. $\overrightarrow{CV}=(1,-3,2)$.

O plano θ é definido por uma equação do tipo $x-3y+2z+d=0$.

Como $C\in\theta$, tem-se $1-3\times(-2)+2+d=0 \Leftrightarrow d=-9$.

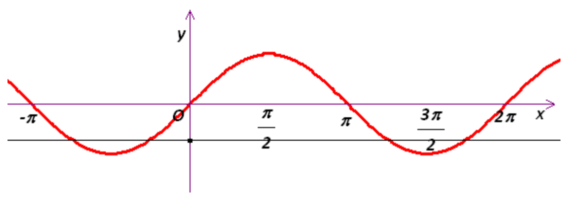
Então θ admite como equação $x-3y+2z-9=0$

Resposta: (B)

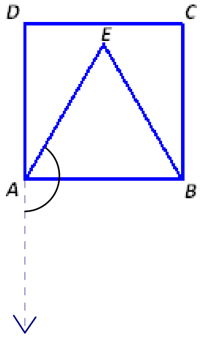
5. $\sin x + a = 0$, sendo $0<a<1$.

$\sin x = -a$

Observa-se que, das opções apresentadas, apenas no intervalo $\left]-\pi \, , \frac{3\pi}{2}\right[$ a equação admite três soluções.



Resposta: (D)



6. Se o perímetro do quadrado é 24, então $\overline{AB} = 6$.
Como o triângulo [*ABE*] é equilátero, as amplitudes de cada um dos seus ângulos internos é 60º.

$$\overrightarrow{AE} \, . \, \overrightarrow{DA} = 6 \times 6 \times \cos\left(90^{o} + 60^{o}\right) = 36 \times \left(-\sin\left(60^{o}\right)\right) =$$

$$= 36 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -18\sqrt{3}$$

Resposta: (A)

GRUPO II

1.

1.1. Se B é um ponto pertencente ao eixo das abcissas é do tipo $B\left(x, 0\right)$.

$$\overrightarrow{AB} = \left(x - 5 \, , \, -2\right)$$

$$\overrightarrow{AB} . \vec{u} = 0 \iff \left(x - 5 \, , \, -2\right) . \left(4 \, , \, -1\right) = 0 \iff 4\left(x - 5\right) + 2 = 0 \iff 4x - 20 + 2 = 0 \iff x = \frac{9}{2}$$

Então $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

1.2. Se $P\left(k + 2, \; -k^2 - 5\right)$ e $A\left(5, \, 2\right)$, então $\overrightarrow{AP} = \left(k - 3, \, -k^2 - 7\right)$.

Se $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AP}$ formam um ângulo obtuso, então $\overrightarrow{AP} . \vec{u} < 0$, uma vez que $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP}, \vec{u}}\right) < 0$.

$$\overrightarrow{AP} . \vec{u} < 0 \iff \left(k - 3, -k^2 - 7\right) . \left(4, -1\right) < 0 \iff 4\left(k - 3\right) - \left(-k^2 - 7\right) < 0 \iff$$

$$\iff 4k - 12 + k^2 + 7 < 0 \iff k^2 + 4k - 5 < 0$$

$$\iff -5 < k < 1$$

Cálculo auxiliar:
$k^2 + 4k - 5 = 0 \iff k = 1 \vee k = -5$

$$k \in \left]-5, 1\right[$$

2.

2.1. Seja *P*(*x*, *y*, *z*) qualquer ponto do plano α. Sabe-se que $\overrightarrow{AP} \, . \, \overrightarrow{CA} = 0$.

$$\left(x + 1, y - 1, z + 4\right) . \left(-2, -1, -3\right) = 0 \iff -2\left(x + 1\right) - \left(y - 1\right) - 3\left(z + 4\right) = 0 \iff$$

$\iff -2x - y - 3z - 13 = 0 \iff 2x + y + 3z + 13 = 0$, como se pretendia demonstrar.

2.2. Das equações cartesianas da reta $x+2=\frac{y+5}{4}=-\frac{z}{2}$, deduz-se que $(-2,-5,0)$ é um ponto da reta e $\vec{u}=(1,4,-2)$ um vetor diretor da reta.

Por outro lado, sabe-se que $\vec{n}=(2,\,1,\,3)$ é um vetor normal a α.

$\vec{u}.\vec{n}=(1,4,-2).(2,1,3)=2+4-6=0$. A reta é paralela ao plano podendo eventualmente estar contida no plano.

É necessário verificar que os pontos da reta não pertencem ao plano.

Basta verificar para um ponto, por exemplo para $(-2,-5,0)$.

$2\times(-2)-5+13=0$ é falso. Então a reta *r* é estritamente paralela a α.

3.

3.1. *BC* é uma reta paralela a *AD* e que passa por *B.*

$$\frac{3-x}{3}=\frac{y}{4} \;\wedge\; z=10 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-3}{-3}=\frac{y}{4} \;\wedge\; z=10$$

Seja $\vec{v}$ um vetor diretor de *AD*, por exemplo, $\vec{v}=(-3,4,0)$.

Então *BC* pode ser definida por: $\frac{x-7}{-3}=\frac{y-3}{4} \;\wedge\; z=10 \;\Leftrightarrow\; \frac{7-x}{3}=\frac{y-3}{4} \;\wedge\; z=10$

3.2. Sabe-se que $\vec{n}=(12,-16,-5)$ é um vetor normal a *ABV* e diretor da reta pretendida.

Como passa por *E*(5, 0, 0), tem-se:

$$\frac{x-5}{12}=-\frac{y}{16}=-\frac{z}{5}$$

3.3. O ponto *A* resulta da interseção da reta *AD* com o plano *ABV*.

$$\begin{cases}12x-16y-5z+14=0\\ \frac{3-x}{3}=\frac{y}{4}\\ z=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12x-16y-5z+14=0\\ 12-4x=3y\\ z=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12x-16y-36=0\\ -4x-3y+12=0\\ z=10\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}12x-16y-36=0\\ -12x-9y+36=0\\ z=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12x-16y-36=0\\ -25y=0\\ z=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=0\\ z=10\end{cases} \quad A(3,0,10)$$

3.4. A secção produzida na pirâmide pelo plano *ACV* é o triângulo [*ACV*].

[*ABCD*] é um quadrado. Sabe-se que $A(3,0,10)$ e $B(7,3,10)$.

$$\overline{AB}=\sqrt{(7-3)^2+3^2+0^2}=5$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2=5^2+5^2 \Leftrightarrow \overline{AC}=5\sqrt{2}$.

A altura do triângulo [*ACV*] é 10.

Então a área é dada por $A_{[ACV]}=\dfrac{5\sqrt{2}\times 10}{2}=25\sqrt{2}\approx 35,4$.

A área é de 35,4 unidades de área, aproximadamente.

4. O ponto *P* tem coordenadas $(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$.

Como se trata do círculo trigonométrico, *A* e *B* têm coordenadas (–1, 0) e (0, –1) respetivamente.

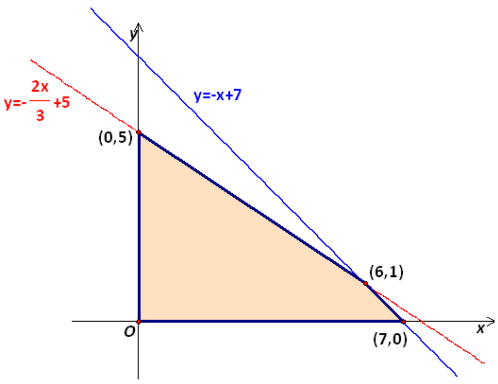
$$\overrightarrow{AP}=(\cos\theta+1\ ,\ \sin\theta) \text{ e } \overrightarrow{BP}=(\cos\theta\ ,\ \sin\theta+1)$$

$$\overrightarrow{AP}\ .\ \overrightarrow{BP}=(\cos\theta+1\ ,\ \sin\theta).(\cos\theta\ ,\ \sin\theta+1) = \cos\theta(\cos\theta+1)+\sin\theta(\sin\theta+1) =$$
$$\cos^2\theta+\cos\theta+\sin^2\theta+\sin\theta = 1+\cos\theta+\sin\theta$$

Conclui-se que $\overrightarrow{AP}\ .\ \overrightarrow{BP}=1+\cos\theta+\sin\theta$.

5. Considerem-se as restrições, sendo x o número de equipas do tipo A e por y o número de equipas do tipo B.

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 2x+3y\leq 18 \\ 4x+4y\leq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq -\dfrac{2x}{3}+6 \\ y\leq -x+7 \end{cases}$$



Vértices do polígono que representa a região admissível:

$$\begin{cases} -x+7=-\dfrac{2x}{3}+5 \\ y=-x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+21=-2x+15 \\ y=-x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

$(7,0)$; $(6,1)$; $(0,5)$ e $(0,0)$

Função objetivo:

$F(x,y)=40x+50y$

Valor da função nos vértices do polígono da região admissível.

Vértice (x,y)	$F(x,y)=40x+50y$
$(7,0)$	280
$(6,1)$	290
$(0,5)$	250
$(0,0)$	0

O número máximo de horas, nas condições apresentadas, é 290 e corresponde à formação de seis equipas do tipo A e uma equipa do tipo B.