# Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

**Proposta de Teste Intermédio** [janeiro 2015]

**Nome:** ____________________________________

**Ano / Turma:** _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

**GRUPO I**

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleciona a única opção correta.
Escreve, na folha de respostas:
- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresentes cálculos nem justificações.

**1.** Em relação a um referencial o.n. *Oxyz* a reta *r* é definida pelas condições:

$$2x = y+1 \quad \wedge \quad z=-5$$

Qual das seguintes equações define vetorialmente a reta?

**(A)** $(x,y,z)=(0,-1,-5)+k(2,1,0), \quad k\in\mathbb{R}$

**(B)** $(x,y,z)=(2,-1,-5)+k(1,2,-5), \quad k\in\mathbb{R}$

**(C)** $(x,y,z)=(0,-1,-5)+k(1,2,0), \quad k\in\mathbb{R}$

**(D)** $(x,y,z)=(2,-1,-5)+k(1,2,0), \quad k\in\mathbb{R}$

**2.** Fixados os pontos *A* e *B* relativamente a um referencial o.n. $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BP}=0$ é:

**(A)** Uma circunferência que admite [*AB*] como diâmetro.

**(B)** A mediatriz de [*AB*].

**(C)** Uma reta perpendicular a *AB* e que passa por *B*.

**(D)** Uma circunferência centrada em *A* e passa por *B*.

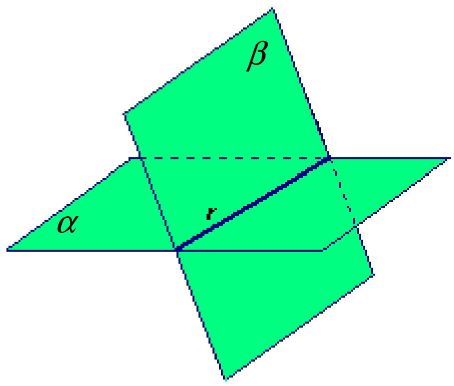
**3.** Na figura estão representados dois planos concorrentes, *α* e *β*, e a reta *r* que resulta da interseção dos dois planos. Sabe-se que o plano *α* é definido pela equação $5x-y+2z=7$.
Qual das seguintes condições pode definir a reta *r*?

**(A)** $(x,y,z)=(0,-1,\ 3)+k(2,\ 4,\ -3),\ k\in \text{IR}$

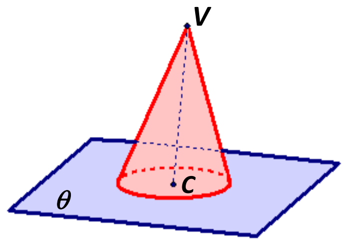
**(B)** $(x,y,z)=(1,\ 8,\ 2)+k(1,\ 3,\ -2),\ k\in \text{IR}$

**(C)** $(x,y,z)=(1,-4,\ 2)+k(2,\ 4,\ -3),\ k\in \text{IR}$

**(D)** $(x,y,z)=(1,\ 8,\ 2)+k(5,\ -1,\ 2),\ k\in \text{IR}$



**4.** Na figura está representado um cone reto de vértice *V* e um plano $\theta$ que contém a base do cone de centro *C*. Em relação a um referencial o.n. *Oxyz* as coordenadas de *V* e *C* são $(2,-5,3)$ e $(1,-2,1)$, respetivamente.




O plano $\theta$ pode ser definido pela equação:

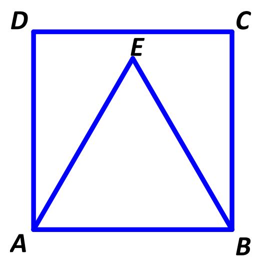
**(A)** $x-2y+z+6=0$ **(B)** $x-3y+2z-9=0$

**(C)** $x-3y+2z=0$ **(D)** $-x+3y-2z+23=0$

**5.** Considera a equação $\sin x + a = 0$, sendo $0 < a < 1$.
Em qual dos seguintes intervalos a equação tem exatamente três soluções?

**(A)** $\left]\pi, 2\pi\right[$ **(B)** $\left]-\pi, \frac{\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ **(D)** $\left]-\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

**6.** Na figura estão representados um quadrado [*ABCD*] e um triângulo equilátero [*ABE*].
Se o perímetro do quadrado é 24, então podes concluir que o valor do produto escalar $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DA}$ é:




**(A)** $-18\sqrt{3}$ **(B)** $18$ **(C)** $-18$ **(D)** $18\sqrt{3}$

## Grupo II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.
**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

**1.** Considera em referencial o.n. *xOy* o vetor $\vec{u}(4,-1)$ e o ponto $A(5,\ 2)$.

**1.1.** Determina as coordenadas de um ponto *B* pertencente ao eixo das abcissas de modo que os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ sejam perpendiculares.

**1.2.** Seja $P\left(k+2,\ -k^2-5\right)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Determina os valores de *k* para os quais os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AP}$ formam um ângulo obtuso.

**2.** Em relação a um referencial *o.n. Oxyz*, considera os pontos, $A(-1,1,-4)$ e $C(1,2,-1)$, a reta *r* definida pelas equações $x+2=\dfrac{y+5}{4}=-\dfrac{z}{2}$ e o plano $\alpha$ de equação $2x+y+3z+13=0$.

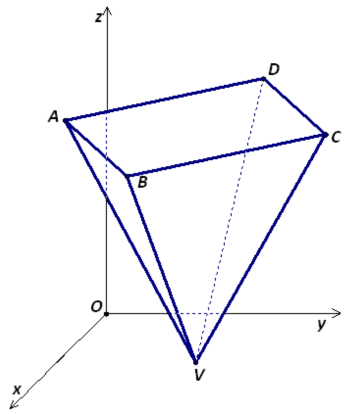
**2.1.** Considera a esfera de centro *C* e que passa por *A*. Mostra que $\alpha$ é o plano tangente à esfera no ponto *A*.

**2.2.** Mostra que a reta *r* é estritamente paralela ao plano $\alpha$.

**3.** Na figura, em referencial o.n. *Oxyz*, está representada uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide está contida no plano $z=10$;
- o vértice *V* é um ponto do plano *xOy*;
- o vértice *B* tem de coordenadas $(7,3,10)$;
- a reta *AD* é definida por $\dfrac{3-x}{3}=\dfrac{y}{4} \ \wedge\ z=10$;
- uma equação do plano *ABV* é $12x-16y-5z+14=0$.




**3.1.** Representa a reta *BC* através de equações cartesianas.

**3.2.** Determina equações cartesianas da reta perpendicular ao plano *ABV* e que passa pelo ponto *E*(5, 0, 0).

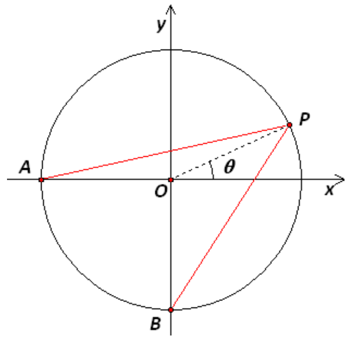
**3.3.** Mostra que o ponto *A* tem coordenadas $(3,0,10)$.

**3.4.** Determina a área da secção produzida na pirâmide pelo plano *ACV*. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

**4.** Na figura está representado o círculo trigonométrico.
Sabe-se que:

- O ponto *P* pertence à circunferência e $x\hat{O}P = \theta$ radianos;
- Os pontos *A* e *B* são as interseções da circunferência com os semieixos negativos das abcissas e das ordenadas, respetivamente.

Mostra que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 1 + \cos\theta + \sin\theta$ .




**5.** Num serviço de saúde há 18 médicos e 28 enfermeiros.
O serviço semanalmente é organizado com equipas de dois tipos:

- Equipas do tipo A: 2 médicos e 4 enfermeiros;
- Equipas do tipo B: 3 médicos e 4 enfermeiros.

Cada equipa do tipo A está ao serviço 40 horas por semana e cada equipa do tipo B garante 50 horas por semana.

Como devem ser organizadas as equipas para que o número global de horas na semana seja máximo.
Designa por *x* o número de equipas do tipo A e por *y* o número de equipas do tipo B.
Resolve o problema, percorrendo as seguintes etapas:

- Indicar as restrições do problema;
- Representar o polígono e as coordenadas dos respetivos vértices correspondentes à região admissível do problema.
- Indicar a função objetivo e determinar o valor máximo que toma e o correspondente número de equipas de cada tipo.

**FIM**

| Cotações | | | | | | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grupo I | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | | | | | |
| | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | | | | | 60 |
| Grupo II | 1.1. | 1.2. | 2.1 | 2.2 | 3.1. | 3.2. | 3.3. | 3.4. | 4. | 5. | |
| | 15 | 15 | 15 | 15 | 10 | 10 | 15 | 15 | 15 | 15 | 140 |
| | | | | | | | | | | | 200 |

# FORMULÁRIO

## GEOMETRIA

### Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$ ($\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

### Áreas de figuras planas

**Losango:** $\dfrac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

**Trapézio:** $\dfrac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

**Polígono regular:** *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

**Setor circular:** $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

### Áreas de superfícies

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$ (*r – raio da base; g – geratriz*)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$ (*r – raio*)

### Volumes

**Pirâmide:** $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Cone:** $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Esfera:** $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (*r – raio*)