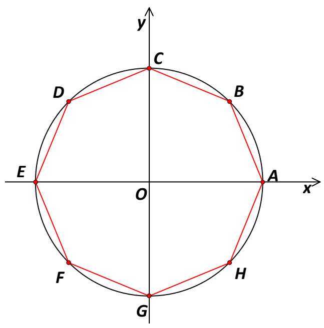
Proposta de Resolução

GRUPO I

1. O lado extremidade coincide com o lado extremidade do ângulo orientado de amplitude $\frac{3\pi}{4}$.



O lado extremidade é $\dot{O}D$.

Resposta: (D)

2. $\operatorname{tg}\alpha = -3 \quad \wedge \quad \alpha \in \left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$

$\operatorname{tg}\alpha = -3 \quad \wedge \quad \alpha \in 2.^{\text{o}}\text{Q}.$

Sabe-se que, $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ e $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Então, $1+9 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{10}$

Assim, $\sin^2\alpha = 1-\frac{1}{10} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{10}$.

Como $\alpha \in 2.^{\text{o}}\text{Q.}$, tem-se $\sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Resposta: (A)

3. Seja θ um valor pertencente ao intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[$.

Se $\theta \in \left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[$, então $\theta \in 2.^{\text{o}}\text{Q}.$

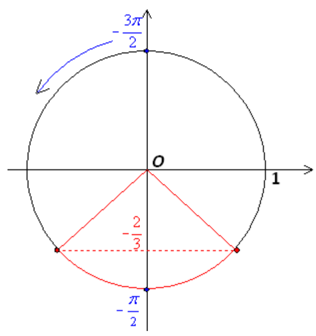
Assim, conclui-se que:

$0 < \sin\theta < 1$; $-1 < \cos\theta < 0$ e $\operatorname{tg}\theta < 0$

A expressão $\cos\theta + \operatorname{tg}\theta$ representa um número negativo (soma de dois números negativos).

Resposta: (B)

4. Considera a equação trigonométrica $2+3\sin x = 0$.



$2+3\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{2}{3}$

Resposta: (C)

5. Se $f(x)=2-\cos(-4x)$, tem-se $f(x)=2-\cos(4x)$

$$f(x+p)=f(x)\Leftrightarrow 2-\cos(4(x+p))=2-\cos(4x)\Leftrightarrow \cos(4x+4p)=\cos(4x)$$

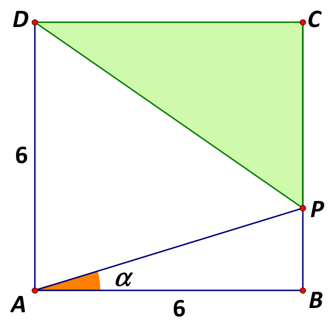
O período positivo mínimo da função cosseno é 2π, então $4p=2\pi \Leftrightarrow p=\frac{\pi}{2}$.

Resposta: (A)

GRUPO II

1.

1.1. $A(\alpha)=18(1-\text{tg}\,\alpha)$



$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\overline{BP}}{6}\Leftrightarrow \overline{BP}=6\,\text{tg}\,\alpha$$

$$A(\alpha)=36-\left(\frac{6\times 6}{2}+\frac{6\times 6\,\text{tg}\,\alpha}{2}\right)$$

$$A(\alpha)=36-(18+18\text{tg}\,\alpha)=18-18\text{tg}\,\alpha=18(1-\text{tg}\,\alpha)$$

$$A(\alpha)=18(1-\text{tg}\,\alpha)$$

1.2.

$$A(\alpha)=10\Leftrightarrow 18(1-\text{tg}\,\alpha)=10\Leftrightarrow -18\text{tg}\,\alpha=-8\Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha=\frac{4}{9}\ \text{ e }\ \alpha\in 1.^{\text{o}}\text{Q.}$$

Sabe-se que, $1+\text{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Então, $1+\frac{16}{81}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{81}{97}$

Como $\alpha\in 1.^{\text{o}}\text{Q.}$, tem-se $\cos\alpha=\sqrt{\frac{81}{97}}=\frac{9}{\sqrt{97}}=\frac{9\sqrt{97}}{97}$.

$$\cos\alpha=\frac{9\sqrt{97}}{97}$$

2. Determina os valores de $k\in\mathbb{R}$ para os quais se tem $\text{tg}\,\theta=k^2+\frac{5k}{2}\ \wedge\ \theta\in\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[$.

Se $\theta\in\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[$, então $-1\le \text{tg}\,\theta<0$.

$$-1\le k^2+\frac{5k}{2}<0\Leftrightarrow k^2+\frac{5k}{2}\ge -1\ \wedge\ k^2+\frac{5k}{2}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k^2+5k+2\ge 0\ \wedge\ 2k^2+5k<0$$

Cálculo auxiliar:

- $2k^2+5k+2=0 \Leftrightarrow k=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4} \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2} \vee k=-2$
- $2k^2+5k=0 \Leftrightarrow k(2k+5)=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=-\frac{5}{2}$

$2k^2+5k+2\geq 0 \quad \wedge \quad 2k^2+5k<0$

$\Leftrightarrow k\in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\quad \wedge \quad k\in \left]-\frac{5}{2},0\right[$

$\Leftrightarrow k\in \left]-\frac{5}{2},-2\right] \cup \left[-\frac{1}{2},0\right[$

3. Simplificação de $P(\alpha)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-2\cos(\pi+\alpha)+\sin(4\pi-\alpha)-\operatorname{tg}(-\alpha-\pi)$

$P(\alpha)=\sin\alpha+2\cos\alpha-\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha$

$P(\alpha)=2\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$

Simplificar $4\sin(-\pi-\alpha)=-3$.

$4\sin(-\pi-\alpha)=-3 \Leftrightarrow -4\sin(\pi+\alpha)=-3 \Leftrightarrow 4\sin\alpha=-3 \Leftrightarrow \sin\alpha=-\frac{3}{4}$

Sendo $\sin\alpha=-\frac{3}{4}$ e $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\alpha\in$ 3.ºQ.

Então, sabe-se que $\sin\alpha=-\frac{3}{4}$ e $\alpha\in$ 3.ºQ.

Pretende-se determinar $P(\alpha)=2\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

Atendendo a que, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ tem-se $\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\cos^2\alpha=1$.

$\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{9}{16} \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{7}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Como $\alpha\in$ 3.ºQ., resulta $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Sabe-se que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, então $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

Assim, $P(\alpha)=2\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2\sqrt{7}}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{7}=-\frac{-2\sqrt{7}}{28}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$.

4. $f(x)=3\text{tg}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

4.1. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:x\neq\dfrac{3\pi}{2}+3k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

4.2. $f(x)=\sqrt{3}$ e indica as soluções pertencentes ao intervalo $[0,\ 2\pi]$.

$$f(x)=\sqrt{3}\Leftrightarrow 3\text{tg}\left(\frac{x}{3}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{x}{3}\right)=\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\ \ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+3k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

Soluções da equação pertencentes ao intervalo $[0,\ 2\pi]$:

Se $k=0$, então $\dfrac{\pi}{2}$. Para os restantes valores de k as soluções não pertencem ao intervalo $[0,\ 2\pi]$. A equação dada tem apenas a solução $\dfrac{\pi}{2}$ no intervalo $[0,\ 2\pi]$.

5. Seja f a função de domínio $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x)=\dfrac{\sin x\,(3+2\cos x)}{2}$.

5.1. Mostra que a área do quadrilátero [*ABOP*] é dada por $f(\theta)$.

A área do quadrilátero [*ABOP*] é dada por:

$$\frac{\overline{OP}\times\sin\theta}{2}+\frac{2\times\cos\theta\times\sin\theta}{2}=\frac{3\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}{2}=\frac{\sin\theta\,(3+2\cos\theta)}{2}$$

$$f(\theta)=\frac{\sin\theta\,(3+2\cos\theta)}{2}$$

5.2. Para um determinado valor de θ, sabe-se que $\text{tg}(\pi-\theta)=-3$. Determina a área do quadrilátero [*ABOP*] para esse valor de θ.

$\text{tg}(\pi-\theta)=-3\Leftrightarrow -\text{tg}\theta=-3\Leftrightarrow \text{tg}\theta=3$ e $\theta\in 1.^{\text{o}}\text{Q.}$

Sabe-se que $1+\text{tg}^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$. Então, $1+9=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow \cos^2\theta=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1}{10}}$.

Como $\theta\in 1.^{\text{o}}\text{Q.}$, tem-se $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Atendendo a que $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, tem-se $\sin^2\theta=1-\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow \sin^2\theta=\dfrac{9}{10}\Leftrightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{\dfrac{9}{10}}$

Como $\theta\in 1.^{\text{o}}Q$, tem-se $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Como a área do quadrilátero é dada por $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta\,(3+2\cos\theta)}{2}$, tem-se

$$f(\theta)=\frac{\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\left(3+\dfrac{2\sqrt{10}}{10}\right)}{2}=\frac{\dfrac{9\sqrt{10}}{10}+\dfrac{60}{100}}{2}=\frac{9\sqrt{10}+6}{20}$$

5.3. $f(x) = 2\sin x$ e $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$f(x) = 2\sin x \Leftrightarrow \frac{\sin x(3+2\cos x)}{2} = 2\sin(x) \Leftrightarrow 3\sin(x) + 2\cos x \sin x - 4\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x \sin x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$

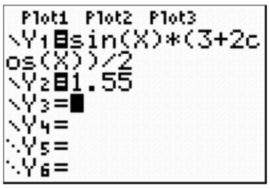
$\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \vee\ \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \vee\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

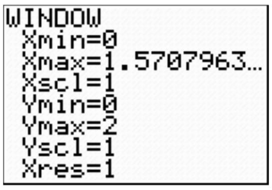
$\frac{\pi}{3}$ é a única solução da pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

5.4. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, consideram-se as funções:

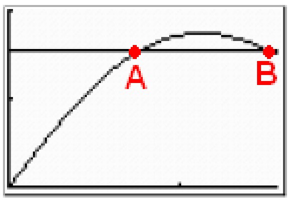
$y_1 = \frac{\sin x(3+2\cos x)}{2}$ e $y_2 = 1{,}55$



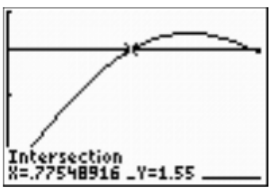
De seguida, atendendo ao domínio da função *f*, tem-se $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, selecionando-se uma janela de visualização adequada.

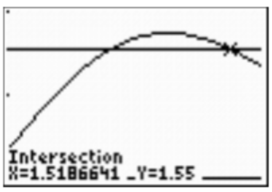


Obtêm-se as seguintes representações gráficas:



Sendo *A* e *B* os pontos de interseção dos dois gráficos (no domínio considerado).
Recorrendo às capacidades da calculadora obtêm-se as coordenadas dos pontos *A* e *B*.





Daqui resulta que a área do quadrilátero [*ABOP*] é maior ou igual a 1,55 se $x \in [0{,}8\ ,\ 1{,}5]$.