Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

O teste é constituído por dois grupos, I e II.

O Grupo I inclui cinco questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta.

Grupo I

- Os **cinco** itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -2\cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(-x - \pi)$.

Qual das seguintes expressões também pode definir a função f?

(A) $-\cos x + \sin x$

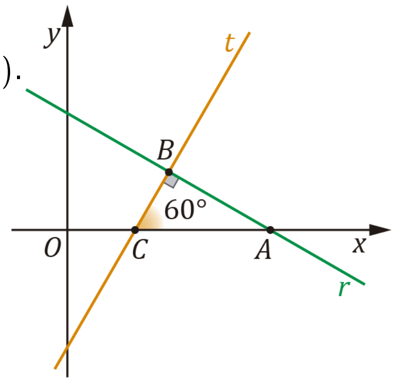
(B) $\sin x$

(C) $\cos x - \sin x$

(D) $3\sin x$

2. Na figura estão representadas duas retas r e t num plano munido de um referencial ortonormado. A reta t tem 60º de inclinação, interseta o eixo Ox no ponto C e é perpendicular à reta r no ponto B.

Sabe-se, ainda, que a reta r interseta o eixo Ox no ponto $A(6, 0)$.



Qual é a equação reduzida da reta r?

(A) $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

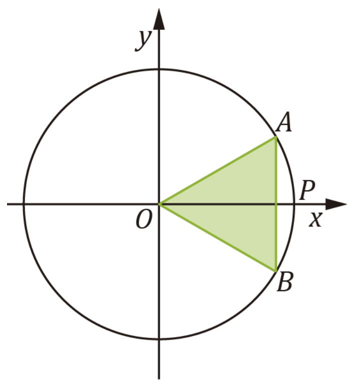
(B) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

(C) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

(D) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$

3. Na figura estão representados, em referencial ortonormado xOy, o círculo trigonométrico e um triângulo $[OBA]$. Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o segmento $[AB]$ é perpendicular ao eixo Ox;
- o ponto P tem coordenadas $(1\ ,\ 0)$ e a amplitude do ângulo POA é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos.



Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$?

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

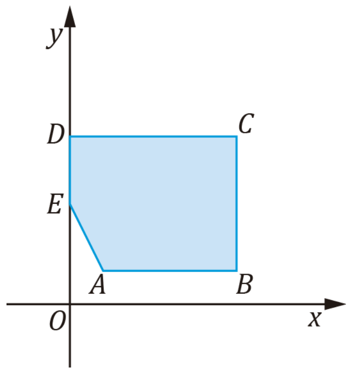
(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Num certo problema de programação linear pretende-se minimizar a função objetivo definida por $L = 3x + 2y$.

Na figura ao lado está representada a região admissível que corresponde ao sistema:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 5 \\ y \geq -2x + 3 \end{cases}$$



Numa das opções está a solução desse problema.

Identifique-a.

(A) $x = 0$ e $y = 2$ **(B)** $x = 1$ e $y = 0$

(C) $x = 1$ e $y = 1$ **(D)** $x = 0$ e $y = 3$

5. Considere a função *f*, real de variável real, definida por $f(x) = -2 + \frac{4x}{2x-1}$.

Seja *g* a função definida por $g(x) = 1 + f\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

Quais são as equações das assíntotas ao gráfico de *g*?

(A) $x = -1$ e $y = 1$ **(B)** $x = \frac{1}{2}$ e $y = 0$

(C) $x = -\frac{3}{2}$ e $y = 1$ **(D)** $x = \frac{3}{2}$ e $y = -1$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** que entender necessárias.

1. Considere as funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$, por $f(x) = 2\cos^2 x - \cos x$ e $g(x) = 2\cos x - 1$.

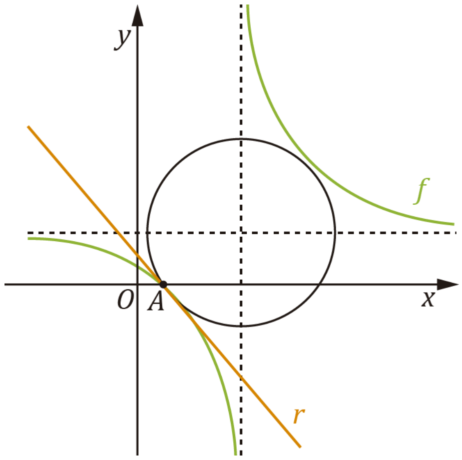
1.1. Determine uma expressão geral dos zeros de *f*.

1.2. Determine os minimizantes de *g* que pertencem ao intervalo $[-2\pi, \pi[$.

1.3. Admita que os gráficos de *f* e *g* estão representados no mesmo referencial ortonormado *xOy*.

Determine as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos.

2. Na figura estão representadas, num referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função racional f, uma circunferência e uma reta r.



Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x)=\frac{2x-1}{2x-4}$;
- o ponto A é a interseção do gráfico de f com o eixo Ox;
- a circunferência passa no ponto A e tem centro no ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de f;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A.

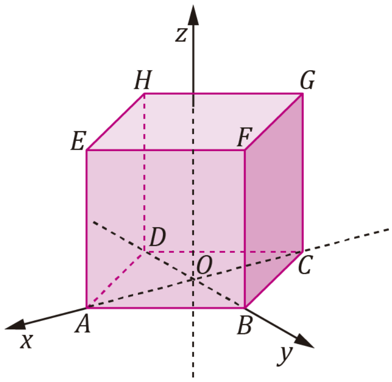
2.1. Determine:

a) as equações das assíntotas ao gráfico de f;

b) as coordenadas do ponto A.

2.2. Usando o produto escalar, determine a equação reduzida da reta r.

3. Na figura está representado, num referencial ortonormado $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta 20.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy;
- a face $[ABCD]$ do cubo está contida no plano xOy;
- o ponto O é o centro da face $[ABCD]$.

3.1. Escreva equações cartesianas da reta BG.

3.2. Seja α a amplitude do ângulo IBG, onde I é o ponto médio do segmento de reta $[ED]$.

Determine α, em radianos, com aproximação às centésimas.

4. Fixado um referencial ortonormado do espaço, considere a reta *r* e o plano α definidos por:

$$r: \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\alpha: x - 3y + (k-1)z = -2, k \in \mathbb{R}$$

4.1. Escreva equações cartesianas da reta *r*.

4.2. Determine o valor real de *k* de modo que a reta *r* seja paralela ao plano α.

5. Na figura ao lado estão representados, num referencial ortonormado *xOy*:

- parte do gráfico da função *f* definida por:

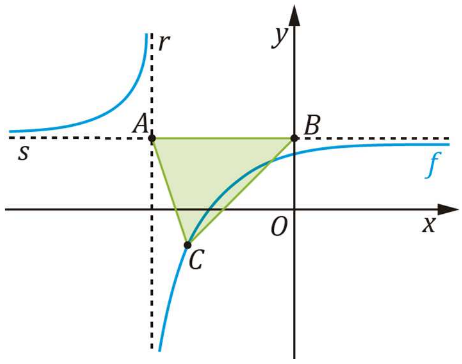
$$f(x) = 2 - \frac{3}{x+4}$$

- as retas *r* e *s*, assíntotas ao gráfico de *f*;
- o triângulo [*ACB*], em que:

  • *A* é o ponto de interseção das retas *r* ;

  • *B* é o ponto de interseção da reta *s* com o eixo *Oy*;

  • *C* é o ponto do gráfico de *f* de abcissa –3.



5.1. Determine a medida da área do triângulo [*ACB*].

5.2. Determine os valores de *x* tais que $f(x) \geq 0$.

Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

5.3. Indique o valor dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\dfrac{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)}$

Cotações

Grupo I				
1	**2**	**3**	**4**	**5**
10	10	10	10	10

Grupo II															Total
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.1. a)**	**2.1. b)**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3. a)**	**5.3. b)**	**5.3. c)**	
10	10	10	5	5	15	15	15	15	15	10	10	5	5	5	**200**

PROPOSTA DE RESOLUÇÕES

Grupo I

1. $f(x) = -2\cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(-x - \pi) = -2(-\sin x) + \sin x = 2\sin x + \sin x = 3\sin x$

Resposta: (D)

2. Seja m_t o declive da reta *t* e m_r o declive da reta *r*.

$m_t = \tan 60° = \sqrt{3}$

Dado que *t* e *r* são perpendiculares, então:

$m_t \times m_r = -1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \times m_r = -1 \Leftrightarrow m_r = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m_r = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, a equação reduzida da reta *r* é da forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b, b \in \mathbb{R}$.

Como $A \in r$ e $A(6, 0)$, então: $0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 6 + b \Leftrightarrow b = 2\sqrt{3}$

Logo, a equação reduzida da reta *r* é $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$.

Resposta: (D)

3. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{OA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AB}\right)$

$A\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$, ou seja, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, logo $\overline{AB} = 1$, ou seja, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$.

Desta forma, $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 1$, pois o raio do círculo trigonométrico é igual a 1 unidade.

$\left(\overrightarrow{OA} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Assim, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

Resposta: (B)

4. A região admissível é um pentágono.

Os seus vértices têm coordenadas (0 , 3) , (0 , 5) , (4 , 5) , (4 , 1) e (1 , 1).

Assim, as opções (A) e (B) são excluídas, porque os pontos de coordenadas (0 , 2) e (1 , 0) não pertencem à fronteira da região admissível.

Relativamente às restantes duas opções, tem-se:

Opção	x	y	$L=3x+2y$
(C)	1	1	$L=3\times 1+2\times 1=5$
(D)	0	3	$L=3\times 0+2\times 3=6$

→ Solução ótima (valor mínimo)

Resposta: (C)

5. $f(x)=-2+\dfrac{4x}{2x-1}$

Recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinómios:

$$\begin{array}{r|l} 4x & 2x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-4x+2} & 2 \\ 2 & \end{array}$$

Portanto, $f(x)=-2+\left(2+\dfrac{2}{2x-1}\right)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{2x-1}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$

Logo, $x=\dfrac{1}{2}$ e $y=0$ são as equações das assíntotas ao gráfico de *f*.

Por outro lado, o gráfico de g pode-se obter a partir do gráfico de *f* pela translação de vetor $\vec{u}\left(-\dfrac{3}{2},1\right)$. Então, $x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=-1$ e $y=0+1\Leftrightarrow y=1$ são as equações das assíntotas ao gráfico de g.

Resposta: (A)

Grupo II

1.1. $f(x)=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(2\cos x-1)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x=0\vee 2\cos x-1=0\Leftrightarrow \cos x=0\vee \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Portanto, uma expressão geral dos zeros de *f* é:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

1.2. Determinemos o contradomínio da função g.

$\forall x\in\mathbb{R}, -1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, -2\leq 2\cos x\leq 2$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, -3\leq 2\cos x-1\leq 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, -3\leq g(x)\leq 1$$

Logo, $D'_g=[-3,1]$, pelo que -3 é o mínimo da função g.

Os valores de x que verificam a equação $g(x)=-3$ são os minimizantes de g.

$$g(x)=-3 \wedge x\in[-2\pi\,,\pi[\;\Leftrightarrow 2\cos x-1=-3 \wedge x\in[-2\pi\,,\pi[\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=-1 \wedge x\in[-2\pi\,,\pi[$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi,\; k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[-2\pi\,,\pi[\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\pi$$

Portanto, o único minimizante de g que pertence ao intervalo $[-2\pi\,,\pi[$ é $-\pi$.

1.3. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x=2\cos x-1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times1}}{2\times2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=1 \vee \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Portanto, as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos são:

$$x=2k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

2.1. **a)** Usando o algoritmo da divisão inteira dos polinómios, temos:

$$\begin{array}{r|l} 2x-1 & 2x-4 \\ \cline{2-2} -2x+4 & 1 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Portanto, $f(x)=1+\dfrac{3}{2x-4}\Leftrightarrow f(x)=1+\dfrac{\frac{3}{2}}{x-2}$

Logo, $x=2$ e $y=1$ são as equações das assíntotas ao gráfico de f.

b) O ponto A pertence ao eixo Ox, logo tem ordenada nula.

Por outro lado, sabemos que o ponto A pertence ao gráfico de f, pelo que:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x-1}{2x-4}=0\Leftrightarrow 2x-1=0\wedge 2x-4\neq0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\wedge x\neq2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Logo, $A\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

2.2. O ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de f tem coordenadas $(2\,,1)$.

Sendo C esse ponto, então tem de coordenadas $(2\,,1)$.

Seja $P(x\,,y)$ um ponto genérico da reta r.

Uma equação desta reta é $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$\overrightarrow{AP}=P-A=(x\,,y)-\left(\frac{1}{2},0\right)=\left(x-\frac{1}{2},y\right)$ e $\overrightarrow{AC}=C-A=(2\,,1)-\left(\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{3}{2},1\right)$

Assim: $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2},y\right)\cdot\left(\frac{3}{2},1\right)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}+y=0\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$

Então, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$ é a equação reduzida da reta *r*.

3.1. Pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

Como $\overline{AB}=\overline{BC}=20$, então $\overline{AC}^2=20^2+20^2\Leftrightarrow\overline{AC}^2=2\times20^2$, logo $\overline{AC}=20\sqrt{2}$.

Portanto, $\overline{BD}=20\sqrt{2}$ e, consequentemente, $B\left(0\,,10\sqrt{2}\,,0\right)$ e $G\left(-10\sqrt{2}\,,0\,,20\right)$.

Um vetor diretor da reta *BG* é $\overrightarrow{BG}$ (por exemplo).

$\overrightarrow{BG}=G-B=\left(-10\sqrt{2}\,,0\,,20\right)-\left(0\,,10\sqrt{2}\,,0\right)=\left(-10\sqrt{2}\,,-10\sqrt{2}\,,20\right)$

O ponto $B\left(0\,,10\sqrt{2}\,,0\right)$ pertence à reta *BG*, logo $\frac{x}{-10\sqrt{2}}=\frac{y-10\sqrt{2}}{-10\sqrt{2}}=\frac{z}{20}$ são equações cartesianas da reta *BG*.

3.2. $E\left(10\sqrt{2}\,,0\,,20\right)$ e $D\left(0\,,-10\sqrt{2}\,,0\right)$, pelo que $I\left(\frac{10\sqrt{2}+0}{2},\frac{0-10\sqrt{2}}{2},\frac{20+0}{2}\right)$, isto é, $I\left(5\sqrt{2}\,,-5\sqrt{2}\,,10\right)$.

$\cos\left(I\hat{B}G\right)=\cos(\alpha)=\cos\left(\overrightarrow{BI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BG}\right)$

- $\overrightarrow{BI}=I-B=\left(5\sqrt{2}\,,-5\sqrt{2}\,,10\right)-\left(0\,,10\sqrt{2}\,,0\right)=\left(5\sqrt{2}\,,-15\sqrt{2}\,,10\right)$
- $\left\|\overrightarrow{BI}\right\|=\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2+\left(-15\sqrt{2}\right)^2+10^2}=\sqrt{50+450+100}=\sqrt{600}$
- $\overrightarrow{BG}=G-B=\left(-10\sqrt{2}\,,0\,,20\right)-\left(0\,,10\sqrt{2}\,,0\right)=\left(-10\sqrt{2}\,,-10\sqrt{2}\,,20\right)$
- $\left\|\overrightarrow{BG}\right\|=\sqrt{\left(-10\sqrt{2}\right)^2+\left(-10\sqrt{2}\right)^2+20^2}=\sqrt{200+200+400}=\sqrt{800}$
- $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BG}=\left(5\sqrt{2}\,,-15\sqrt{2}\,,10\right)\cdot\left(-10\sqrt{2}\,,-10\sqrt{2}\,,20\right)=$

$$=5\sqrt{2}\left(-10\sqrt{2}\right)+\left(-15\sqrt{2}\right)\left(-10\sqrt{2}\right)+10\times2=$$

$$=-100+300+200=400$$

$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BG}}{\left\|\overrightarrow{BI}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BG}\right\|}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{400}{\sqrt{600}\times\sqrt{800}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{400}{400\sqrt{3}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Portanto, $\alpha\approx0{,}96$ radianos.

4.1. $\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y+3)-y+z=4 \\ x=2y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y+6-y+z=4 \\ x=2y+3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+z=-2 \\ x=2y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-z-2}{3} \\ \dfrac{x-3}{2}=y \end{cases}$

Portanto: $\dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{-z-2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z+2}{-3}$

Assim, $\dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z+2}{-3}$ são equações cartesianas da reta *r*.

4.2. Seja $\vec{r}$ um vetor diretor da reta *r* e $\vec{n}$ um vetor normal ao plano α.

$r\,//\,\alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2,1,-3)\cdot(1,-3,k-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-3-3(k-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1-3k+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k=2 \Leftrightarrow k=\dfrac{2}{3}$

Logo, $k=\dfrac{2}{3}$.

5.1. As retas *r* e *s* são definidas pelas seguintes equações:

$r: x=-4$

$s: y=2$

Portanto, $A(-4,2)$ e $B(0,2)$.

Por outro lado, o ponto *C* pertence ao gráfico de *f* e tem abcissa –3, pelo que a sua ordenada é igual a $f(-3)$.

$f(-3)=2-\dfrac{3}{-3+4} \Leftrightarrow f(-3)=2-\dfrac{3}{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(-3)=-1$

Logo, a medida da área do triângulo [*ABC*] é dada por:

$A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{AB}\times(\text{ordenada de } A+\text{valor absoluto da ordenada de } C)}{2}=$

$=\dfrac{4\times(2+1)}{2}=6$

5.2. Determinemos a abcissa do ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo *Ox*.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2-\frac{3}{x+4}=0 \Leftrightarrow \frac{3}{x+4}=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3=2(x+4) \wedge x+4 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}=x+4 \wedge x \neq 4 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}-4 \wedge x \neq -4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \wedge x \neq -4 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$$

Assim, a abcissa desse ponto é $-\frac{5}{2}$.

Portanto, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -4\right[\cup \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

5.3. **a)** $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2^-$

c) $\dfrac{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)} = \dfrac{2^+}{+\infty} = 0^+$