Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Em qual das opções está representado o ângulo generalizado $(\theta,\ n)$ de amplitude $-1100°$?

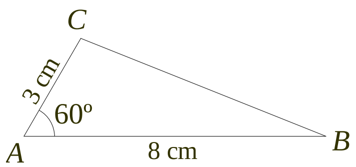
(A) $(20°\ ,\ -3)$ **(B)** $(-20°\ ,\ -3)$

(C) $(-20°\ ,\ 3)$ **(D)** $(340°\ ,\ -4)$

2. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 8$ cm
- $\overline{AC} = 3$ cm
- $B\hat{A}C = 60°$



A medida do comprimento do lado $[BC]$, em centímetros, é igual a:

(A) 7 **(B)** 8

(C) $\sqrt{55}$ **(D)** $\sqrt{73}$

3. O valor exato de $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{29\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)$ é:

(A) $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

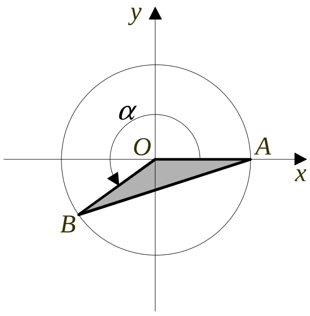
(C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. O valor exato de $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)-\tan\left(\frac{\pi}{3}-\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ é:

(A) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Na figura ao lado estão representados, num referencial ortonormado *Oxy:*



- a circunferência trigonométrica;
- o ponto *A* de coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto *B* pertencente à circunferência trigonométrica tal que, sendo α a amplitude do ângulo *OAB*, $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Qual das expressões seguintes representa a área do triângulo $[AOB]$ em função de α?

(A) $\frac{1}{2}\sin\alpha$ **(B)** $-\frac{1}{2}\sin\alpha$

(C) $\sin\alpha$ **(D)** $-\sin\alpha$

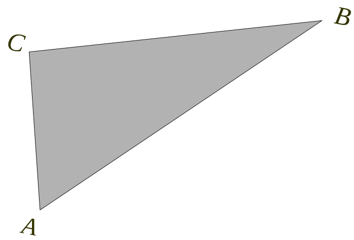
Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Determine, sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais, os valores de *k* que verificam a condição:

$$2\cos x = k^2 - 2,\ \ x \in \left]180°, 270°\right]$$

2. As dimensões de um terreno com a forma de um triângulo [*ABC*] são $\overline{AB} = 30\,\text{m}$, $\overline{BC} = 26\,\text{m}$ e $\overline{AC} = 14\,\text{m}$



2.1. Mostre que $B\hat{A}C = 60°$.

2.2. Determine a área do terreno. Apresente o resultado em metros quadrados com aproximação às unidades.

3. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3+2\cos\left(\frac{3\pi-2x}{2}\right)$.

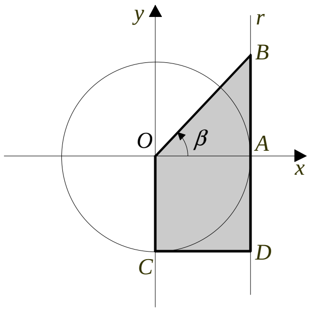
3.1. Determine o contradomínio de *f*.

3.2. Sabendo que $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$ e que $\theta\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, determine $f(\theta)$.

3.3. Resolva a equação $f(x)=2$ para $x\in[0,\pi[$.

4. Na figura ao lado estão representados, em referencial ortonormado *Oxy*:

- a circunferência trigonométrica;
- a reta *r* de equação $x=1$;
- os pontos *A* e *C* de coordenadas $(1,0)$ e $(0,-1)$, respetivamente;
- o ponto *B* que se desloca na reta *r* sempre com ordenada positiva;
- o ponto *D* tal que [*OCDA*] é um quadrado.



Para cada posição do ponto *B* seja β a amplitude do ângulo *AOB*.

Seja *g* a função que a cada valor de $\beta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ faz corresponder o perímetro do quadrilátero [*OCDB*].

4.1. Mostre que $g(\beta)=3+\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$.

4.2. Determine o valor exato do perímetro do quadrilátero [*OCDB*] sabendo que

4.2.1. $\sin\beta=0,6$

4.2.2. $\sin\beta=\cos\beta$

5. Mostre que:

$$\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\times\tan^2\alpha+2\sin^2\alpha=\tan^2\alpha,\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ \text{ com } k\in\mathbb{Z}$$

FIM

Cotações

Grupo I

1	2	3	4	5	
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

1	2.1	2.2	3.1.	3.2.	3.3.	4.1.	4.2.1.	4.2.2	5.	
15	20	15	10	20	15	15	15	15	20	**160**

Grupo I

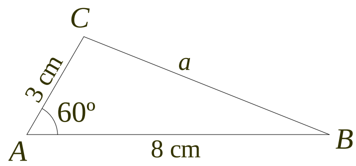
1. $-1100^{\circ}=-20^{\circ}-3\times 360^{\circ}$

$(\theta,\ n)=(-20\ ,\ -3)$

Resposta: **(B)**

2. Seja $\overline{BC}=a$ cm.

Pelo Teorema de Carnot:



$a^2=3^2+8^2-2\times 3\times 8\times \cos 60^{\circ}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2=9+64-2\times 24\times \frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2=9+64-24\Leftrightarrow a^2=49$

Como $a>0$, então $a=7$.

$\overline{BC}=7$ cm

Resposta: **(A)**

3. $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{29\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)=$

$=-\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{24\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{12\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=$

$=-\sin\left(\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(4\pi+\frac{5\pi}{6}\right)-\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$

$=-\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=$

$=\frac{1}{2}-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Resposta: **(C)**

4. $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)-\tan\left(\frac{\pi}{3}-\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=$

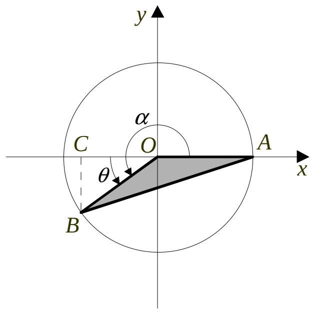
$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Resposta: **(C)**

$\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ porque $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$

$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$ porque $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\pi}{6}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

5. Seja $\pi + \theta = \alpha \Leftrightarrow \theta = \alpha - \pi$.



A altura do triângulo $[AOB]$ relativa ao vértice B é $\overline{BC} = \sin\theta$.

$\overline{BC} = \sin\theta = \sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha$

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times (-\sin\alpha)}{2} = -\frac{1}{2}\sin\alpha$$

Resposta: **(B)**

Grupo II

1. $2\cos x = k^2 - 2 \wedge x \in \left]180^\circ, 270^\circ\right] \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{k^2 - 2}{2} \wedge x \in \left]180^\circ, 270^\circ\right]$

Se $x \in \left]180^\circ, 270^\circ\right]$ temos que $-1 < \cos x \leq 0$, pelo que $-1 < \dfrac{k^2 - 2}{2} \leq 0$.

$$-1 < \frac{k^2 - 2}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -2 < k^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2 > -2 \wedge k^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 > 0 \wedge k \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow$$

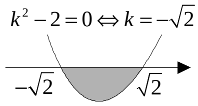
$$\Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{0\} \Leftrightarrow$$

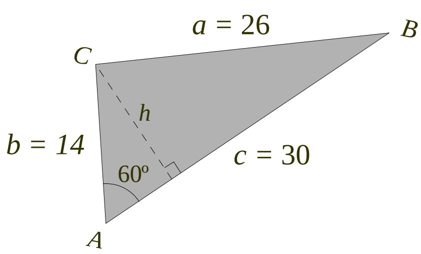
$$\Leftrightarrow k \in \left[-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right]$$

Cálculo auxiliar

$k^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -\sqrt{2} \vee k = \sqrt{2}$



2. $\overline{AB} = c = 30$, $\overline{BC} = a = 26$ e $\overline{AC} = b = 14$ (em metros)



2.1. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{14^2 + 30^2 - 26^2}{2 \times 14 \times 30} = \dfrac{420}{840} = \dfrac{1}{2}$

Se $\cos A = \cos B\hat{A}C = \dfrac{1}{2}$, então $B\hat{A}C = 60^\circ$.

2.2. Seja h a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao vértice C.

$$\frac{h}{\overline{AC}} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow \frac{h}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 7\sqrt{3}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{30 \times 7\sqrt{3}}{2} = 105\sqrt{3}$$

Portanto, a área do terreno é igual a $105\sqrt{3}\ \text{m}^2$, ou seja, é aproximadamente igual a $182\ \text{m}^2$.

3. $f\left(x\right)=3+2\cos\left(\frac{3\pi-2x}{2}\right)$, $D_f=\mathbb{R}$

3.1. $f\left(x\right)=3+2\cos\left(\frac{3\pi-2x}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=3+2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{2x}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)=3+2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=3-2\sin\left(x\right)$

Como $x\in\mathbb{R}$, temos $-1\leq\sin x\leq1$.

$-1\leq\sin x\leq1\Leftrightarrow-2\leq-2\sin x\leq2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-2\leq3-2\sin x\leq3+2\Leftrightarrow1\leq f\left(x\right)\leq5$

Logo, $D'_f=\left[1,5\right]$.

3.2. $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$1+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow1+\frac{2}{16}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow1+\frac{1}{8}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{9}{8}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow\cos^2\theta=\frac{8}{9}$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\frac{8}{9}+\sin^2\theta=1\Leftrightarrow\sin^2\theta=1-\frac{8}{9}\Leftrightarrow\sin^2\theta=\frac{1}{9}$

Como $\theta\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, temos $\sin\theta=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}$.

$f\left(\theta\right)=3-2\sin\left(\theta\right)=3-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$

3.3. $f\left(x\right)=2\wedge x\in\left[0,\pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow3-2\sin\left(x\right)=2\wedge x\in\left[0,\pi\right[\Leftrightarrow$

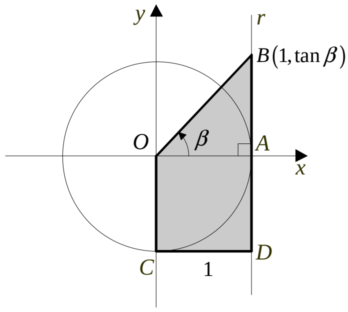
$\Leftrightarrow-2\sin\left(x\right)=-1\wedge x\in\left[0,\pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\left(x\right)=\frac{1}{2}\wedge x\in\left[0,\pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\vee x=\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\vee x=\frac{5\pi}{6}$

$S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$

4. **4.1.** $\overline{AB} = \tan\beta$



$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \cos\beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\overline{OB}} = \cos\beta \Leftrightarrow \overline{OB} = \dfrac{1}{\cos\beta}$

$\overline{OC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1$

Como $A \in r$, temos:

$P_{[OCDB]} = \overline{OC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AB} + \overline{OB} =$

$= 1 + 1 + 1 + \tan\beta + \dfrac{1}{\cos\beta} =$

$= 3 + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} + \dfrac{1}{\cos\beta} \quad = 3 + \dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$

Logo, $g(\beta) = 3 + \dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$, $\beta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

4.2. **4.2.1** $\sin\beta = 0,6$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$(0,6)^2 + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = 1 - 0,36 \Leftrightarrow \cos^2\beta = 0,64$

Dado que β é do 1.º quadrante, temos $\cos\beta = \sqrt{0,64} = 0,8$.

$g(\beta) = 3 + \dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta} = 3 + \dfrac{1+0,6}{0,8} = 3 + \dfrac{1,6}{0,8} = 3 + 2 = 5$

4.2.2 $\sin\beta = \cos\beta \wedge \beta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \beta = \dfrac{\pi}{4}$

$$g(\beta) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + \frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 3 + \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 + \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= 3 + \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\times 2}{\sqrt{2}\times 2} = 3 + \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}} = 3 + \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} =$$

$$= 3 + \frac{2\sqrt{2}+2}{2} == 3 + \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{2} = 3 + \sqrt{2} + 1 = 4 + \sqrt{2}$$

5. $\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\times\tan^2\alpha + 2\sin^2\alpha =$

$= \left(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\times\tan^2\alpha + 2\sin^2\alpha =$

$= \left(1 - 2\cos^2\alpha\right)\times\tan^2\alpha + 2\sin^2\alpha =$

$= \tan^2\alpha - 2\cos^2\alpha\times\tan^2\alpha + 2\sin^2\alpha =$

$= \tan^2\alpha - 2\cancel{\cos^2\alpha}\times\dfrac{\sin^2\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}} + 2\sin^2\alpha =$

$= \tan^2\alpha \cancel{-2\sin^2\alpha} + \cancel{2\sin^2\alpha} =$

$= \tan^2\alpha \qquad \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$