Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo 1

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na sua folha de respostas, o número de cada item e a letra que identifica a opção escolhida.

---

1. Considere o conjunto $A = \left\{ x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: \tan(3x) = 1 \right\}$.

Qual dos seguintes poderá corresponder à representação em extensão do conjunto A ?

(A) $\left\{ \frac{5\pi}{12} \right\}$

(B) $\left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12} \right\}$

(C) $\left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\}$

(D) $\left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12} \right\}$

2. Considere, num referencial ortonormado xOy, os pontos $A(1, 4)$, $B(-3, 1)$ e um ponto C pertencente ao eixo das abcissas.
Admita que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A.

Quais são as coordenadas do ponto C ?

(A) $(1, 0)$ **(B)** $(2, 0)$ **(C)** $(3, 0)$ **(D)** $(4, 0)$

3. Considere, num referencial ortonormado do espaço, a reta r definida por:

$$x = \frac{2z+3}{4} \quad \wedge \quad y = -6$$

Em qual das opções seguintes se apresentam as coordenadas de um ponto P e de um vetor diretor $\vec{r}$ da reta r ?

(A) $P\left(0, -6, \frac{3}{2}\right)$ e $\vec{r}(1, 0, 2)$

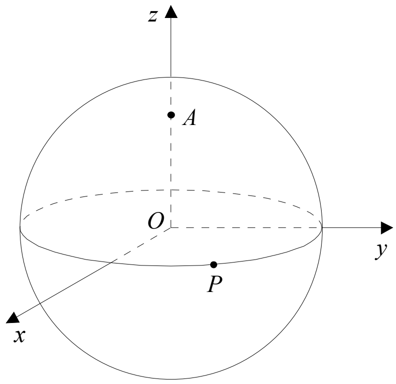
(B) $P\left(0, -6, -\frac{3}{2}\right)$ e $\vec{r}(1, 0, 2)$

(C) $P\left(1, -6, \frac{3}{2}\right)$ e $\vec{r}(0, -6, 2)$

(D) $P\left(1, -6, -\frac{3}{2}\right)$ e $\vec{r}(0, -6, 2)$

4. Na figura estão representados, em referencial ortonormado *Oxyz*:

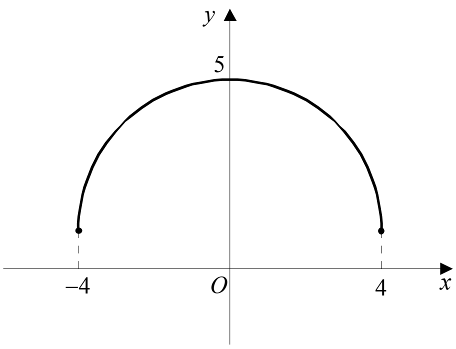
- o ponto *A* de coordenadas (0 , 0 , 3);
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
- a circunferência que resulta da interseção dessa superfície esférica com o plano de equação $z = 0$.



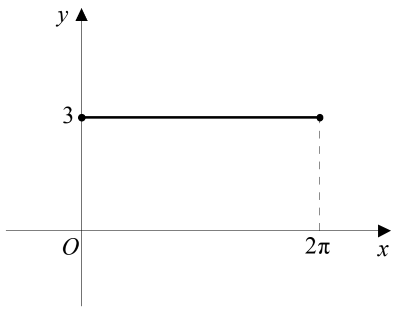
Um ponto *P* percorre essa circunferência, dando uma volta completa. Considere a função *f* que faz corresponder, à **abcissa** do ponto *P*, a **distância** de *P* a *A*.

Qual das seguintes opções corresponde ao gráfico da função *f* ?

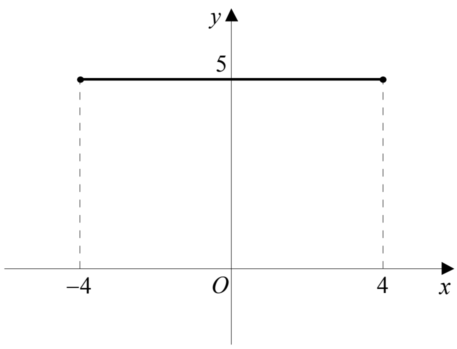
(A)



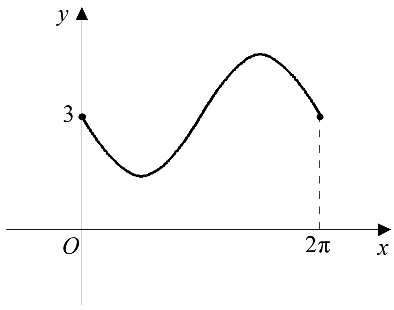
(B)



(C)



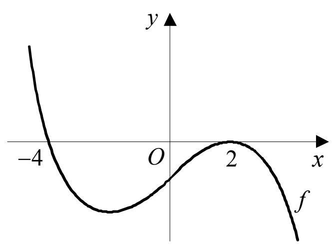
(D)



5. Na figura está representada, num referencial *xOy*, parte do gráfico de uma função polinomial *f* de domínio $\mathbb{R}$.

A função f tem apenas dois zeros: –4 e 2 .

Seja *g* a função definida por $g(x) = \sqrt{f(x-3)}$.



Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função *g* ?

(A) $]-\infty\ ,\ -4] \cup \{2\}$ **(B)** $[-7,\ +\infty[$

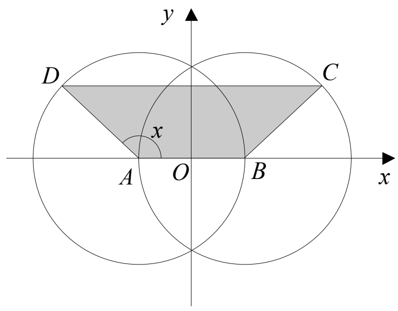
(C) $]-\infty\ ,\ -1] \cup \{5\}$ **(D)** $[-4\ ,\ 2]$

Grupo 2

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura estão representados, num referencial ortonormado *Oxy*:



- os pontos $A(-1\ ,\ 0)$ e $B(1\ ,\ 0)$;
- uma circunferência de centro *A* e que passa por *B*;
- uma circunferência de centro *B* e que passa por *A*;
- o ponto *D* que se desloca sobre a circunferência de centro *A* sendo *x* a amplitude, em radianos, do ângulo *BAD*, com $x \in \left]\frac{\pi}{3}\ ,\ \pi\right[$;
- o ponto *C* desloca-se sobre a circunferência de centro *B* de tal forma que se tem sempre a reta *DC* paralela à reta *AB*.

1.1. Mostre que a área do trapézio [*ABCD*] é dada, em função de *x*, por:

$$A(x) = 4\sin x(1-\cos x)$$

1.2. Determine o valor exato de $A\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Considere, num referencial ortonormado *Oxyz*, o plano α definido pela condição $3x-2y+z-5=0$.

2.1. Considere o ponto $P(-1\ ,\ 2\ ,\ 3a)$, sendo a um certo número real.

Sabe-se que a reta *OP* é paralela ao plano α, sendo *O* a origem do referencial.

Determine o valor de a .

2.2. Seja *A* o ponto de interseção do plano α com o eixo *Oy* e *B* o simétrico de *A* relativamente ao plano *xOz* .

Determine uma equação cartesiana do plano β, paralelo ao plano α e que passa pelo ponto *B*.

3. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, definida por $g(x) = \frac{x+2}{2x-1}$.

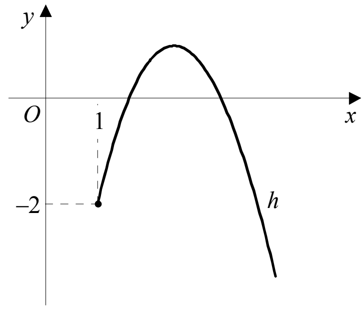
3.1. Determine as equações das assíntotas ao gráfico de g.

3.2. Resolva analiticamente a condição $g(x) \leq \frac{x-3}{2x+1}$.

Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalo de números reais.

3.3. Na figura ao lado está representada, num referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função h, de domínio $[1, +\infty[$.

Determine o domínio da função $h \circ g$.

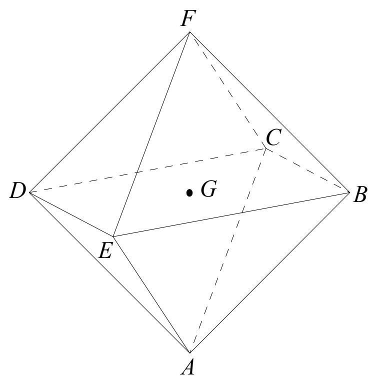


4. Na figura está representado um octaedro regular $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- o ponto G é o centro do octaedro;
- $\overline{AB} = a$.

Mostre que $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \frac{a^2}{2}$.



Cotações

Grupo 1	Grupo 2								Total
	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	200
50 (5 × 10)	20	20	20	15	15	20	20	20	

Proposta de resolução

Grupo 1

1. $\tan(3x) = 1 \Leftrightarrow \tan(3x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

As soluções da equação no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ são $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{17}$ (obtidas para $k \in \{-1,\ 0,\ 1\}$).

Portanto, $A = \left\{-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{5\pi}{12}\right\}$.

Resposta: (C)

2. O ponto C tem coordenadas do tipo $(x\ ,\ 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Como o triângulo [*ABC*] é retângulo em *A*, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares.

Portanto, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

- $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3\ ,\ 1) - (1\ ,\ 4) = (-4\ ,\ -3)$
- $\overrightarrow{AC} = C - A = (x\ ,\ 0) - (1\ ,\ 4) = (x-1\ ,\ -4)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (-4\ ,\ -3) \cdot (x-1\ ,\ -4) = 0 \Leftrightarrow -4(x-1) + (-3) \times (-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4 + 12 = 0 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$$

Então, $C(4\ ,\ 0)$.

Resposta: **(D)**

3. $r:\ x = \frac{2z+3}{4} \wedge y = -6 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{2z}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{4}{2}} \wedge y = -6 \Leftrightarrow x = \frac{z + \frac{3}{2}}{2} \wedge y = -6$

Portanto, um ponto P e um vetor diretor $\vec{r}$ podem ser $P\left(0\ ,\ -6\ ,\ -\frac{3}{2}\right)$ e $\vec{r}(1\ ,\ 0\ ,\ 2)$.

Resposta: (B)

4. Sabemos que $\overline{OP} = 4$ (raio da superfície esférica) e $\overline{OA} = 3$ (cota do ponto *A*).

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 25 \text{ , donde } \overline{AP} = 5 .$$

As abcissas do ponto *P* pertencem ao intervalo [–4 , 4].

Assim, o gráfico da função *f* é um segmento de reta definido pela condição: $-4 \le x \le 4 \wedge y = 5$

Resposta: (C)

5. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x-3) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \leq -4 \vee x - 3 = 2\} =$

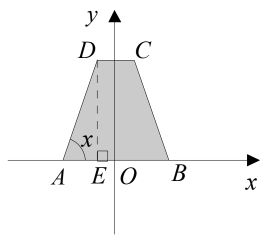
$= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x = 5\} =]-\infty , -1] \cup \{5\}$

Resposta: (C)

Grupo 2

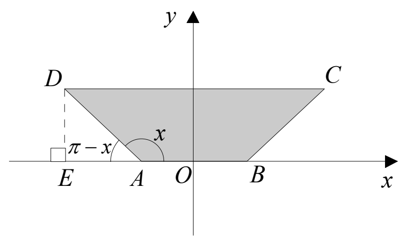
1.1. $\overline{AD} = \overline{AB} = 2$

Se $\frac{\pi}{3} < x \leq \frac{\pi}{2}$:



- $\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \sin x \Leftrightarrow \frac{\overline{DE}}{2} = \sin x \Leftrightarrow \overline{DE} = 2\sin x$
- $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \cos x \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{2} = \cos x \Leftrightarrow \overline{AE} = 2\cos x$
- $\overline{DC} = 2 \times \overline{EO} = 2 \times \left(\overline{AO} - \overline{AE}\right) = 2 \times (1 - 2\cos x) = 2 - 4\cos x$

Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$:



- $\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \sin(\pi - x) \Leftrightarrow \frac{\overline{DE}}{2} = \sin x \Leftrightarrow \overline{DE} = 2\sin x$
- $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{2} = -\cos x \Leftrightarrow \overline{AE} = -2\cos x$
- $\overline{DC} = 2 \times \overline{EO} = 2 \times \left(\overline{AO} + \overline{AE}\right) = 2 \times (1 - 2\cos x) = 2 - 4\cos x$

Área do trapézio $[ABCD] = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{DE} =$

$= \frac{2 + 2 - 4\cos x}{2} \times 2\sin x = \frac{4 - 4\cos x}{2} \times 2\sin x =$

$= (2 - 2\cos x) \times 2\sin x = 2(1 - \cos x) \times 2\sin x =$

$= 4\sin x(1 - \cos x)$

Portanto, $A(x) = 4\sin x(1 - \cos x)$.

1.2. $A\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$

$$=4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\left(1-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(1-\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\right)=3\sqrt{3}$$

2.1. Como a reta OP é paralela ao plano α, qualquer vetor com a direção da reta (e em particular $\overrightarrow{OP}$) e o vetor normal do plano $\overrightarrow{n_\alpha}$ são perpendiculares.

$\vec{u}_\alpha(3\ ,\ -2\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{OP}=P-O=(-1\ ,\ 2\ ,\ 3a)-(0\ ,\ 0\ ,\ 0)=(-1\ ,\ 2\ ,\ 3a)$

Como os vetores são perpendiculares, $\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP}=0$.

$(3\ ,\ -2\ ,\ 1)\cdot(-1\ ,\ 2\ ,\ 3a)=0 \Leftrightarrow -3-4+3a=0 \Leftrightarrow 3a=7 \Leftrightarrow a=\frac{7}{3}$

Logo, $a=\frac{7}{3}$.

2.2. Ponto A:

$3x-2y+z=0 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow 0-2y+0-5=0 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{2} \wedge x=0 \wedge z=0$

$A\left(0\ ,\ -\frac{5}{2}\ ,\ 0\right)$

Ponto B:

Como B é o simétrico do ponto A relativamente ao plano xOz, então tem as mesmas abcissa e cota e ordenada simétrica.

Logo, $B\left(0\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ 0\right)$.

Plano β:

Por outro lado, sendo β paralelo a α, os seus vetores normais são colineares, pelo que um vetor normal ao plano β é $\overrightarrow{n_\alpha}(3, -2\ ,\ 1)$ e passa pelo ponto B, logo uma equação cartesiana do plano β é:

$3(x-0)-2\left(y-\frac{5}{2}\right)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+5+z=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z+5=0$

Portanto, $3x-2y+z+5=0$ é uma equação cartesiana do plano β.

3.1. Recorrendo à divisão inteira de polinómios:

$$\begin{array}{r|l} x+2 & 2x-1 \\ \hline -x+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{5}{2} & \end{array}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{2x-1} \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{5}{4}}{x-\frac{1}{2}}$$

Assim, $x=\frac{1}{2}$ e $y=\frac{1}{2}$ são as equações das assíntotas ao gráfico da função *g*.

3.2. $g(x)\leq\frac{x-3}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x-1}\leq\frac{x-3}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x-1}-\frac{x-3}{2x+1}\leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{(x-3)(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+x+4x+2-\left(2x^2-x-6x+3\right)}{(2x-1)(2x+1)}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+5x+2-2x^2+7x-3}{(2x-1)(2x+1)}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12x-1}{(2x-1)(2x+1)}\leq 0$$

Zeros de numerador: $12x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{12}$

Zeros de denominador: $(2x-1)(2x+1)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \vee 2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{1}{2}$

Tabela de sinais:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$12x-1$	–	–	–	0	+	+	+
$(2x-1)(2x+1)$	+	0	–	–	–	0	+
$\frac{12x-1}{(2x-1)(2x+1)}$	–	n.d.	+	0	–	n.d.	+

Portanto, $g(x)\leq\frac{x-3}{2x+1} \Leftrightarrow x\in\left]-\infty\,,\,-\frac{1}{2}\right[\cup\left[\frac{1}{12}\,,\,\frac{1}{2}\right[$.

3.3. $D_{h \circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_h \right\}$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \wedge \frac{x+2}{2x-1} \in [1 \, , \, +\infty[\right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2} \wedge \frac{x+2}{2x-1} \geq 1 \right\}$$

Vamos resolver a condição $\frac{x+2}{2x-1} \geq 1$.

$$\frac{x+2}{2x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x-1} \geq \frac{2x-1}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{x+2-(2x-1)}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2-2x+1}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{2x-1} \geq 0$$

Zeros do numerador: $-x+3=0 \Leftrightarrow x=3$

Zeros do denominador: $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Construindo uma tabela de sinais, vem:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$-x+3$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x+3}{2x-1}$	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

Logo, $\frac{-x+3}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2} \, , \, 3 \right]$.

$$D_{h \circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2} \wedge \frac{x+2}{2x-1} \geq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} < x \leq 3 \right\} = \left] \frac{1}{2} \, , \, 3 \right]$$

Portanto, $D_{h \circ g} = \left] \frac{1}{2} \, , \, 3 \right]$.

4. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{EC} \right) =$ $\qquad \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{EF} \cdot \left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} \right) =$ $\qquad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}$

$= \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FC} \right) =$

$= \frac{1}{2} \left(\left\| \overrightarrow{EF} \right\|^2 + 0 \right) = \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^2}{2}$ $\qquad \left\| \overrightarrow{EF} \right\| = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = a$ e $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{FC}$ pois se o octaedro é regular, $[ACFE]$ é um quadrado.