Proposta de teste de avaliação

Matemática A

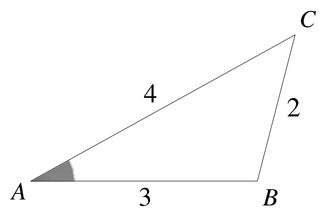
11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

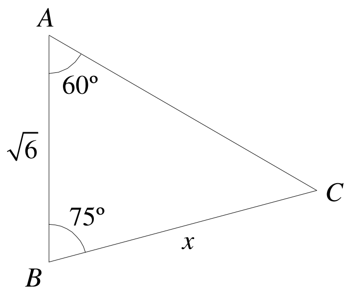
1. No triângulo $[ABC]$ da figura, $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 2$ e $\overline{AC} = 4$.



O valor de $\cos B\hat{A}C$ é igual a:

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{7}{8}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{5}{24}$

2. No triângulo $[ABC]$ da figura:

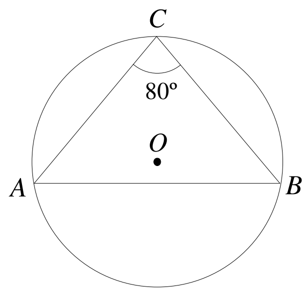


- $B\hat{A}C = 60^\circ$
- $C\hat{B}A = 75^\circ$
- $\overline{AB} = \sqrt{6}$
- $\overline{BC} = x$

O valor de x é:

(A) 3 **(B)** $\sqrt{3}$ **(C)** $2{,}2$ **(D)** $3\sqrt{2}$

3. Na figura está representado o triângulo isósceles $[ABC]$ inscrito numa circunferência de centro O.



O ângulo interno de vértice C tem 80º de amplitude e $[AB]$ é o maior lado.

Considere a rotação de centro O e ângulo generalizado (α, n) que transforma B em C.

Um possível valor de α é:

(A) 80º **(B)** 50º **(C)** 25º **(D)** 100º

4. Da amplitude α de certo ângulo sabe-se que $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Então, pode afirmar-se que:

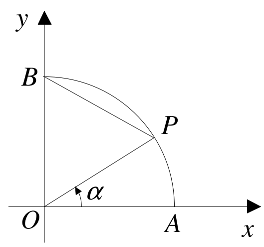
(**A**) $\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{3}$

(**B**) $\cos(\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$

(**C**) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3}$

(**D**) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{1}{3}$

5. Na figura está representado, num referencial ortonormado xOy, o arco de circunferência AB de centro na origem do referencial e raio igual a 1. O ponto P pertence ao arco AB e α é a amplitude do ângulo AOP



Qual das expressões seguintes representa a distância de B a P?

(**A**) $\sqrt{2+2\sin\alpha}$

(**B**) $\sqrt{2+2\cos\alpha}$

(**C**) $\sqrt{2(1-\sin\alpha)}$

(**D**) $\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

Grupo II

1. Verifique a igualdade seguinte para os valores de x para os quais a expressão tem significado:

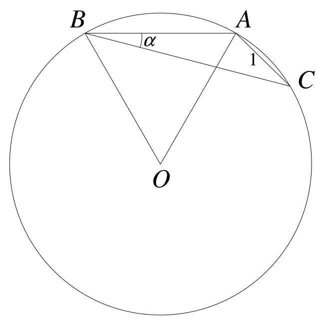
$$\cos x \tan x + \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = 1$$

2. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 2.

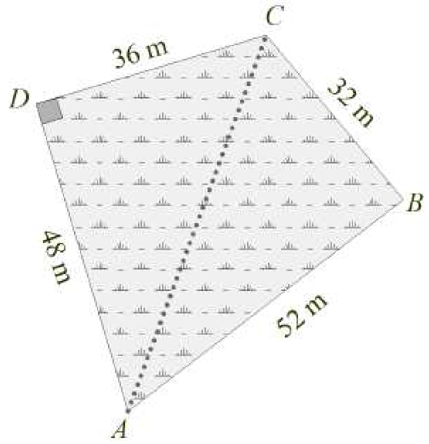
Sabe-se que:

- B, A e C são pontos da circunferência;
- o triângulo $[OAB]$ é equilátero;
- $\overline{AC} = 1$;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo CBA.

Determine $\cos\alpha$.



3. Na figura está representado um esquema de um terreno quadrangular.



Tal como é indicado na figura, sabe-se que:

- o lado [AD] é perpendicular ao lado [DC];
- $\overline{AB} = 52$ m , $\overline{BC} = 32$ m , $\overline{CD} = 36$ m e $\overline{AD} = 48$ m .

Determine, em metros quadrados com aproximação às décimas, a área do terreno.

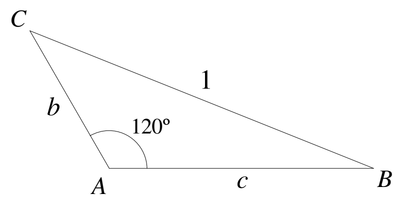
Sugestão: Determine sucessivamente:

- a área do triângulo [ACD];
- a distância de A a C;
- a amplitude do ângulo ACB;
- a altura do triângulo [ABC] relativa ao vértice B;
- a área do triângulo [ABC];
- a área do terreno.

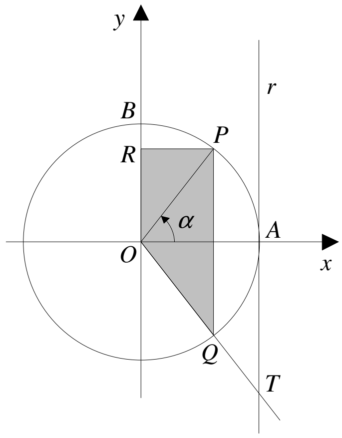
4. Na figura está representado o triângulo [ABC] , em que:

- $\overline{BC} = 1$
- $B\hat{A}C = 120º$
- $3c = 5b$ sendo $b = \overline{AC}$ e $C = \overline{AB}$

Determine b e c .



5. Na figura estão representados num referencial ortonormado xOy:



- a circunferência trigonométrica;
- os pontos A e B de coordenadas $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respetivamente;
- a reta r de equação $x = 1$;
- o ponto T, interseção da reta OQ com a reta r;
- o ponto P que se desloca sobre o arco AB.

Para cada posição do ponto P seja:

- Q a imagem de P pela reflexão de eixo Ox;
- R o ponto do eixo Oy com ordenada igual à de P;
- T o ponto de interseção da reta OQ com a reta r;
- α a amplitude do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

5.1. Mostre que a medida da área do trapézio $[OQPR]$ é dada, em função de α, por:

$$\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

5.2. Para uma certa posição do ponto P, o ponto T tem ordenada igual a $-\frac{15}{8}$.

Determine, para esta posição do ponto T, a medida da área do trapézio $[OQPR]$.

5.3. Determine $\overline{QT}$ quando $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

FIM

Cotações

Grupo I

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**Total**
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

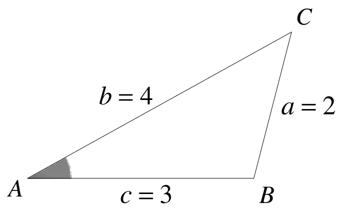
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**Total**
20	20	30	20	25	25	20	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$

$$= \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \times 4 \times 3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$



Resposta: (B)

2. $A\hat{C}B = 180° - 60° - 75° = 45°$

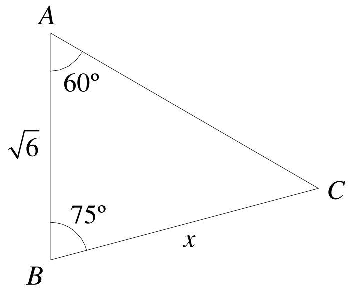
$$\frac{\sin 45°}{\sqrt{6}} = \frac{\sin 60°}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \sin 45° = \sqrt{6} \sin 60° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{18}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3$$

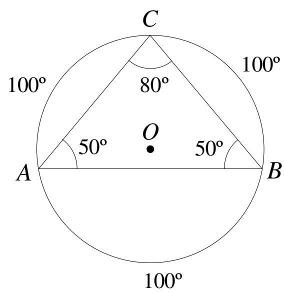


Resposta: (A)

3. Se $[AB]$ é o maior lado:

$$B\hat{A}C = C\hat{B}A = \frac{180° - 80°}{2} = 50°$$

$\overset{\frown}{BC} = 2 \times 50° = 100°$



Resposta: (D)

4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$

Resposta: (C)

5. $B(0,1)$; $P(\cos\alpha, \sin a)$

$$\overline{BP} = \sqrt{(\cos\alpha - 0)^2 + (\sin\alpha - 1)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\sin\alpha + 1} = \sqrt{2 - 2\sin\alpha} = \sqrt{2(1 - \sin\alpha)}$$

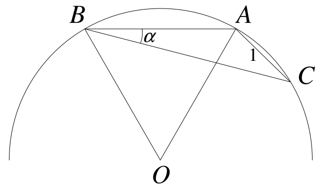
Resposta: (C)

Grupo II

1. $\cos x \tan x + \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \cos x \times \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} =$

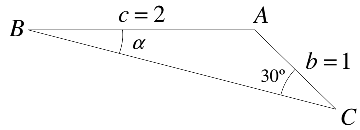
$$= \sin x + \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x} = \sin x + 1 - \sin x = 1$$

2. Se o triângulo $[OAB]$ é equilátero, então:



- $\overline{AB} = \overline{OA} = 2$ (a circunferência tem raio 2)
- $\overset{\frown}{AB} = A\hat{O}B = 60^\circ$, pelo que $A\hat{C}B = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Pela lei dos senos:



$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\sin 30^\circ}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{4}$$

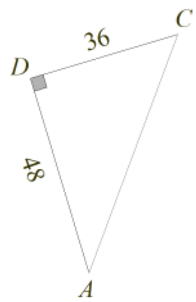
Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{15}{16}$$

Dado que α é um ângulo agudo, $\cos\alpha > 0$, pelo que $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{15}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

3. $\text{Área}_{[ACD]} = \dfrac{48\times 36}{2}\ \text{m}^2 = 864\ \text{m}^2$

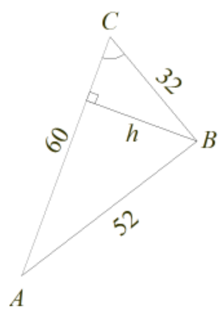


$$\overline{AC}^{\,2} = 48^2 + 36^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{48^2+36^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2304+1296} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{3600} \Leftrightarrow \overline{AC} = 60$$

$\overline{AC} = 60$ m

$$\cos A\hat{C}B = \frac{60^2+32^2-52^2}{2\times 60\times 32} = \frac{1920}{3840} = \frac{1}{2}$$



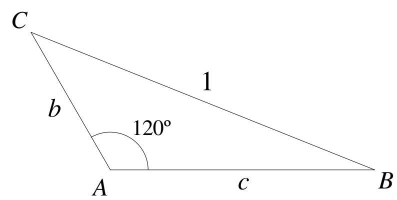
Logo, $A\hat{C}B = 60^\circ$.

$$\frac{h}{\overline{BC}} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow \frac{h}{32} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 32\times\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 16\sqrt{3}$$

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{60\times 16\sqrt{3}}{2}\ \text{m}^2 = 480\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Área do terreno $= \text{Área}_{[ACD]} + \text{Área}_{[ABC]} = \left(864 + 480\sqrt{3}\right)\ \text{m}^2 \approx 1695{,}4\ \text{m}^2$

4. Seja $a = \overline{BC} = 1$.



$3c = 5b \Leftrightarrow c = \frac{5}{3}b$

Pelo Teorema de Carnot:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$1^2 = b^2 + \left(\frac{5}{3}b\right)^2 - 2b \times \frac{5}{3}b \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = b^2 + \frac{25b^2}{9} + \frac{5b^2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = 9b^2 + 25b^2 + 15b^2$

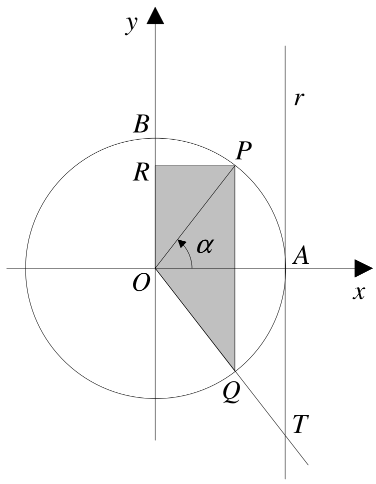
$\Leftrightarrow 9 = 49b^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{49} \Leftrightarrow$

$\overset{b>0}{\Leftrightarrow} b = \sqrt{\frac{9}{49}} \Leftrightarrow b = \frac{3}{7}$

$c = \frac{5}{3}b = \frac{5}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

$b = \frac{3}{7}$ e $c = \frac{5}{7}$

5.1. $\text{Área}_{[OQPR]} = \frac{\overline{OR} + \overline{PQ}}{2} \times \overline{RP}$



$P(\cos\alpha\,, \sin\alpha)$

$R(0\,, \sin\alpha)$

$Q(\cos\alpha\,, -\sin\alpha)$

Como α é do 1.º quadrante, $\cos\alpha > 0$ e $\sin\alpha > 0$.

Logo:

$\overline{OR} = \sin\alpha$

$\overline{PQ} = 2\sin\alpha$

$\overline{RP} = \cos\alpha$

$\text{Área}_{[OQPR]} = \frac{\sin\alpha + 2\sin\alpha}{2} \times \cos\alpha = \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

5.2. A ordenada do ponto T é igual a $\tan(-\alpha)$.

$$\tan(-\alpha) = -\frac{15}{8} \Leftrightarrow -\tan\alpha = -\frac{15}{8} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{15}{8}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{225}{64} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{289}{64} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{64}{289}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{64}{289}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{8}{17}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{64}{289} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{285}{289} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{15}{17}$$

$$\text{Área}_{[OQPR]} = \frac{3}{2} \times \frac{8}{17} \times \frac{15}{17} = \frac{360}{578} = \frac{180}{289} \text{ u.a.}$$

5.3. $Q\left(\cos\frac{\pi}{3}, -\sin\frac{\pi}{3}\right)$ e $T\left(1, -\tan\frac{\pi}{3}\right)$

$Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $T\left(1, -\sqrt{3}\right)$

$$\overline{QT} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 3 - 2 \times \frac{3}{2} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1 + 3 - 3} = \sqrt{1} = 1$$