Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

O teste é constituído por dois grupos, I e II.

O Grupo I inclui quatro questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta.

Grupo I

- Os **quatro** itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Um ângulo de amplitude $-\frac{139\pi}{6}$ radianos tem como lado extremidade o mesmo lado que o ângulo cuja amplitude, em radianos, é igual a:

(A) $-\frac{11\pi}{6}$ **(B)** $-\frac{7\pi}{6}$ **(C)** $\frac{11\pi}{6}$ **(D)** $\frac{7\pi}{6}$

2. Qual das seguintes expressões designa um número real positivo, para qualquer *x* pertencente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$?

(A) $\sin x + \tan x$ **(B)** $\cos x - \tan x$ **(C)** $\frac{\tan x}{\cos x}$ **(D)** $\sin x \times \cos x$

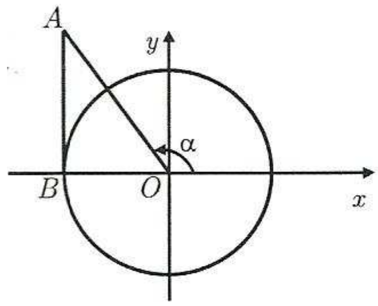
3. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Sabe-se que $36 \sin\theta \cos\theta = 12$. Assim, o valor de $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ é:

(A) $\frac{5}{3}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 1

4. Relativamente à figura ao lado, sabe-se que:

- o triângulo $[ABO]$ é retângulo em *B*;
- o círculo representado é o círculo trigonométrico;
- α designa, em radianos, a amplitude do ângulo suplementar do ângulo *AOB*;
- $\overline{AO} = \sqrt{3}$.



Qual é o valor de $\frac{6}{\cos\alpha}$?

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(C)** $-6\sqrt{3}$ **(D)** $-\sqrt{3}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** que entender necessárias.

5. Determine, usando intervalos de números reais, os valores de *m* para os quais é possível a condição:

$$\cos\alpha = \frac{m^2-16}{9} \wedge \alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

6. Sem recorrer à calculadora, mostre que:

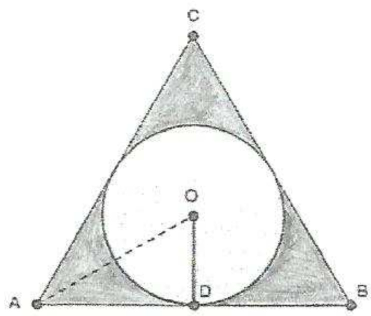
$$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right)+2\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+2\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sugestão: Pode, se assim o entender, associar desenhos de círculos trigonométricos para justificar determinadas igualdades.

7. Na figura ao lado está representado o triângulo equilátero [*ABC*] de lado igual a 4 unidades no qual foi inscrito um círculo de centro *O*.

Sabe-se, ainda, que $[OD]$ é um raio desse círculo e $[OD]\perp[AB]$.

Determine o valor exato da área da região sombreada.



8. Considere $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $\sin(-\pi-\alpha)=-\frac{1}{4}$.

Determine o valor exato de $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\tan(-4\pi-\alpha)$.

9. Prove que, sempre que as expressões têm significado, se tem:

$$\sin(\pi-\alpha)\times\cos(-\alpha)\times\left[\tan(-\pi+\alpha)+\frac{1}{\tan\alpha}\right]=1$$

10. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado *xOy*, os pontos $A(\cos\beta, \sin\beta)$ e $B(2, 0)$. Seja *d* a distância entre os pontos *A* e *B*. Mostre que $d^2=5-4\cos\beta$.

Grupo I	**Grupo II**					
56	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
	24	24	24	24	24	24

PROPOSTA DE RESOLUÇÕES

Grupo I

1. $-\frac{139\pi}{6}=-23\frac{1}{6}\pi=-22\pi-\pi-\frac{\pi}{6}$. Portanto, um ângulo de amplitude $-\frac{139\pi}{6}$ radianos tem como extremidade o mesmo lado que um ângulo de amplitude, em radianos, $-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$.

Resposta: (B)

2. Para qualquer *x* pertencente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $\tan x<0$, $\sin x<0$ e $\cos x>0$, pelo que das quatro expressões apresentadas a única que representa um número positivo é $\cos x-\tan x$

Resposta: (B)

3. $36\sin\theta\cos\theta=12 \Leftrightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$

Portanto, $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$.

Resposta: (A)

4. Temos que $\cos(\pi-\alpha)=\frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow -\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim, $\frac{6}{\cos\alpha}=\frac{6}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=6\times\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{18}{\sqrt{3}}=\frac{-18\sqrt{3}}{3}=-6\sqrt{3}$.

Resposta: (C)

Grupo II

5. Dado que $\cos\alpha=\frac{m^2-16}{9} \wedge \alpha\in\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, então $0<\cos\alpha\leq 1$, ou seja, $0<\frac{m^2-16}{9}\leq 1$.

$0<\frac{m^2-16}{9}\leq 1 \Leftrightarrow m^2-16>0 \wedge m^2-16\leq 9 \Leftrightarrow m^2-16>0 \wedge m^2-25\leq 0$ **(1)**

$m^2-16=0 \Leftrightarrow m=-4 \vee m=4$ e $m^2-25=0 \Leftrightarrow m=-5 \vee m=5$

Voltando a **(1)**:

$m^2-16>0 \wedge m^2-25\leq 0 \Leftrightarrow \left(]-\infty, -4[\,\cup\,]4, +\infty[\right)\cap[-5, 5] \Leftrightarrow [-5, -4[\,\cup\,]4, 5]$

Portanto, $m\in[-5, -4[\,\cup\,]4, 5]$.

6. $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right)+2\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+2\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=$

$=\cos\left(-\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+2\times1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-2\times\frac{1}{2}+2=$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-1-1+2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. $D\hat{A}O=30^{\text{o}}$, pelo que $\tan\left(30^{\text{o}}\right)=\frac{\overline{OD}}{\overline{AD}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\overline{OD}}{2}\Leftrightarrow\overline{OD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Assim, a área do círculo é igual a $\pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}\pi$.

Por outro lado, $\tan\left(60^{\text{o}}\right)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{\overline{CD}}{2}\Leftrightarrow\overline{CD}=2\sqrt{3}$.

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\frac{4\times2\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$.

Portanto, a área da região sombreada é igual a $4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$.

8. Sabemos que $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\sin(-\pi-\alpha)=-\frac{1}{4}$.

$\sin(-\pi-\alpha)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sin\alpha=-\frac{1}{4}$

Por outro lado, α pode pertencer ao 1.º ou ao 4.º quadrante, mas $\sin\alpha<0$, pelo que α pertence ao 4.º quadrante.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\tan(-4\pi-\alpha)=-\cos\alpha+\tan(-\alpha)=-\cos\alpha-\tan\alpha$ **(1)**

Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$\cos^2\alpha+\left(-\frac{1}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{1}{16}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{15}{16}\Leftrightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}\vee\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$

No entanto, α pertence ao 4.º quadrante, pelo que $\cos\alpha>0$, então $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=-\frac{1}{\sqrt{15}}=-\frac{\sqrt{15}}{15}$

Voltando a **(1)**: $-\cos\alpha-\tan\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}-\left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\right)=-\frac{15\sqrt{15}}{60}+\frac{4\sqrt{15}}{60}=-\frac{11\sqrt{15}}{60}$

Portanto, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\tan(-4\pi-\alpha)=-\frac{11\sqrt{15}}{60}$.

9. $\sin(\pi-\alpha)\times\cos(-\alpha)\times\left[\tan(-\pi+\alpha)+\dfrac{1}{\tan\alpha}\right]=\sin\alpha\times\cos\alpha\times\left[\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}\right]=$

$$=\sin\alpha\times\cos\alpha\times\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]=\sin\alpha\times\cos\alpha\times\left[\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\times\cos\alpha}\right]=$$

$$=\sin\alpha\times\cos\alpha\times\left[\frac{1}{\sin\alpha\times\cos\alpha}\right]=\frac{\sin\alpha\times\cos\alpha}{\sin\alpha\times\cos\alpha}=1$$

10. Utilizando a fórmula da distância entre dois pontos do plano:

$$d=\overline{AB}=\sqrt{(\cos\beta-2)^2+(\sin\beta-0)^2}=\sqrt{\cos^2\beta-4\cos\beta+4+\sin^2\beta}=$$

$$=\sqrt{1-4\cos\beta+4}=\sqrt{5-4\cos\beta}$$

Se $d=\sqrt{5-4\cos\beta}$, então $d^2=5-4\cos\beta$.