Grupo I

1. Se $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, então $2\times\frac{\pi}{4} < 2x < 2\times\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \pi$.

(x pertence ao 1.º Q e $2x$ pertence ao 2.º Q).

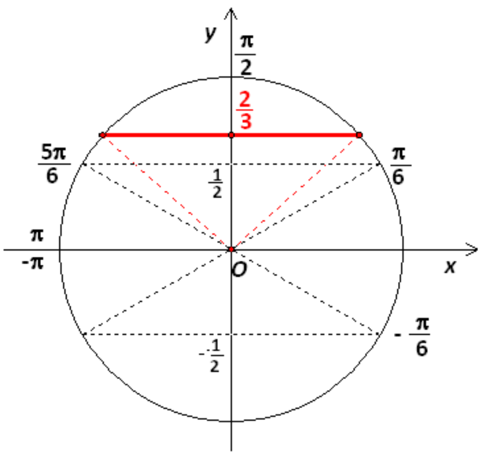
Assim, $\tan(2x) < 0$ e $\cos x > 0$. Daqui resulta que $\tan(2x)\cos(x) < 0$.

Opção: (A) $\tan(2x)\cos(x)$

2. $3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{3}$

Recorrendo ao círculo trigonométrico verifica-se que:

- no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \pi\right[$ a equação tem duas soluções;
- no intervalo $\left]-\pi, \frac{\pi}{6}\right[$ a equação não tem soluções (é impossível);
- no intervalo $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ a equação tem uma solução;
- no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right[$ a equação tem uma solução.



Opção: (B) $\left]-\pi, \frac{\pi}{6}\right[$

3. Se o declive da reta *r* é *m*, então o declive da reta *s* é $-\frac{1}{m}$.

Assim, tem-se que $\tan(\theta) = -\frac{1}{m}$.

Como $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{-\frac{1}{m}} = -m$

Opção: (D) $-m$

4. $r: \quad x = y - 1 \ \wedge \ z = 3$

$$x = y - 1 \ \wedge \ z = 3 \Leftrightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} \ \wedge \ z = 3$$

Um vetor diretor da reta *r* é $\vec{u}(1,1,0)$.

Qualquer vetor diretor de *r* é colinear com $\vec{u}(1,1,0)$, ou seja, é do tipo
$k\vec{u}(k,k,0), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Das opções dadas a única que satisfaz é a (A).

Opção: (A) $\quad (-3,-3,0)$

5. O centro da esfera tem coordenadas $(-1,0,1)$ e é um ponto da reta *r*.

Então a reta passa pelo centro da esfera. A interseção da reta com a esfera é um segmento de reta correspondente a um diâmetro.

O raio da esfera é igual a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. O diâmetro, dobro do raio, é $4\sqrt{2}$.

Opção: (B) $\quad 4\sqrt{2}$

6. Equação do plano *yOz*: $x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y + 5 \end{cases}$$

As coordenadas de qualquer ponto da reta *r* são do tipo $(0, y, y+5)$, $y \in \mathbb{R}$.

Das opções apresentadas a (D) é a única que satisfaz a condição $(0, y, y+5)$, $y \in \mathbb{R}$.

Opção: (D) $(0,-1,4)$

Grupo II

1.

1.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow 2\sin(-2x)=0 \Leftrightarrow -2\sin(2x)=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=0$

$\Leftrightarrow 2x=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

Zeros de *f*: $x=\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

1.2. $f(x)=\sqrt{3}\quad \wedge\quad x\in\left]\pi,\ 2\pi\right[$

$2\sin(-2x)=\sqrt{3} \Leftrightarrow -2\sin(2x)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \vee \quad 2x=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \ \vee\ x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in\left]\pi,\ 2\pi\right[$, tem-se: $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi \ \vee\ x=\frac{2\pi}{3}+\pi$, ou seja, $x=\frac{11\pi}{6} \ \vee\ x=\frac{5\pi}{3}$.

Resposta: $\frac{5\pi}{3}$ (abcissa de *A*) e $\frac{11\pi}{6}$ (abcissa de *B*).

2.

2.1. Pretende-se o valor de $\overline{AP}+\overline{BC}=\sin\alpha+\tan\alpha$, sabendo que $\overline{AB}=1-\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Sabe-se que: $1-\cos\alpha=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3}$ e $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, tem-se: $\sin^2\alpha=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{5}{9}$.

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Assim, $\overline{AP}+\overline{BC}=\sin\alpha+\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

Resposta: $\overline{AP}+\overline{BC}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$

2.2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{3}{5}\Leftrightarrow-\sin\alpha=-\frac{3}{5}\Leftrightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}$

A área do trapézio é dada por: $\frac{\overline{AP}+\overline{BC}}{2}\times\overline{AB}=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{2}\times(1-\cos\alpha)$

Sabe-se que $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Então $\cos^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$. Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

Sabe-se que, $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Então, $\tan\alpha=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$.

Área do trapézio: $\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{2}\times(1-\cos\alpha)=\frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}{2}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{27}{200}=0{,}135$

Resposta: Área do trapézio: 0,135

2.3.

A área do trapézio é dada por: $\frac{\overline{AP}+\overline{BC}}{2}\times\overline{AB}=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{2}\times(1-\cos\alpha)$

$$=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{2}\times(1-\cos\alpha)=\frac{\frac{\sin\alpha\times\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2}\times(1-\cos\alpha)$$

$$=\frac{\sin\alpha\times(1+\cos\alpha)\times(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{2\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\times\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$$

Resposta: A área do trapézio é dada por $\frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$.

3.

3.1. Se *P* pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares as coordenadas são do tipo (x,x).

Mas *P* também pertence à reta *r*. Então, tem-se:

$(x,x)=(-3,1)+k(2,-4)$, $k\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x=-3+2k \\ x=1-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4k=-3+2k \\ x=1-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ x=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$P(x,x)$, ou seja, $P\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$

Resposta: Coordenadas do ponto *P* $\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$

3.2. $\overrightarrow{AB}=B-A=(6,-4)$

Seja $\vec{r}$ um vetor diretor de *r*: $\vec{r}(2,-4)$

$$\cos\left(AB\,\hat{}\,r\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\vec{r}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\vec{r}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\vec{r}\right\|}=\frac{|12+16|}{\sqrt{36+16}\times\sqrt{4+16}}$$

$$\cos\left(AB\,\hat{}\,r\right)=\frac{28}{\sqrt{1040}}$$

Recorrendo à calculadora, obtém-se $AB\,\hat{}\,r\approx 29{,}7^\circ$.

Resposta: A amplitude do ângulo formado pelas duas retas é $29{,}7^\circ$.

3.3. Seja *C* o centro da circunferência.

$C(0,3)$. A reta tangente à circunferência no ponto *A* é o conjunto dos pontos $P(x,y)$ do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{AP}=0$.

$\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{AP}=0\Leftrightarrow(-1,-1).(x+1,y-2)=0$

$\Leftrightarrow -x-1-y+2=0\Leftrightarrow y=-x+1$

Equação reduzida da reta: $y=-x+1$

Resposta: $y=-x+1$

4.

4.1. $r: \frac{x+1}{3}=y=z-1$

$\frac{x+1}{3}=y=z-1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$

Um vetor diretor de *r*: $\vec{r}(3,1,1)$

Equações que definem a reta *s*:

$s: \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$

Equação do plano *xOz*: $y=0$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3}=y-2 \\ z-2=y-2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Coordenadas do ponto de interseção de *s* com o plano *xOz*: $(-7,0,0)$

Resposta: $(-7,0,0)$

4.2. $A(-1,2,2)$

$\alpha: \ x+2y-3z=1$

Um vetor normal ao plano α: $\vec{n}(1,2,-3)$

Reta que passa em *A* e é perpendicular a α: $(x,y,z)=(-1,2,2)+k(1,2,-3)$, $k\in\mathbb{R}$

O centro *C* da superfície esférica é o ponto de interseção da reta com o plano.

$C(-1+k,2+2k,2-3k)$, $k\in\mathbb{R}$.

O ponto *C* pertence ao plano α. Então:

$-1+k+2(2+2k)-3(2-3k)=1 \Leftrightarrow -1+k+4+4k-6+9k=1 \Leftrightarrow 14k=4 \Leftrightarrow k=\frac{2}{7}$

Assim, $C\left(-1+\frac{2}{7},2+\frac{4}{7},2-\frac{6}{7}\right)$.

$C\left(-\frac{5}{7},\frac{18}{7},\frac{8}{7}\right)$

Raio da superfície esférica:

$$\overline{AC}=\sqrt{\left(-1+\frac{5}{7}\right)^2+\left(2-\frac{18}{7}\right)^2+\left(2-\frac{8}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{49}+\frac{16}{49}+\frac{36}{49}}=\sqrt{\frac{56}{49}}=\frac{\sqrt{56}}{7}$$

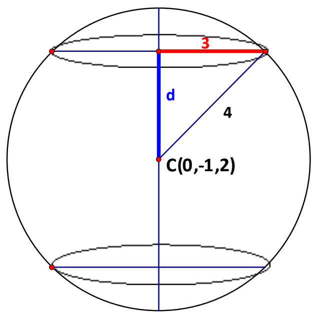
Equação da superfície esférica: $\left(x+\frac{5}{7}\right)^2+\left(y-\frac{18}{7}\right)^2+\left(z-\frac{8}{7}\right)^2=\frac{56}{49}$

Resposta: $\left(x+\frac{5}{7}\right)^2+\left(y-\frac{18}{7}\right)^2+\left(z-\frac{8}{7}\right)^2=\frac{56}{49}$

5. Área do círculo: πr^2

$\pi r^2=9\pi \Leftrightarrow r=3$

Raio da esfera: 4



Seja d a distância do plano ao centro C da esfera.

$d^2+3^2=4^2 \Leftrightarrow d^2=7 \Leftrightarrow d=\pm\sqrt{7}$

Assim, os planos são definidos por:

$z=2+\sqrt{7}$ e $z=2-\sqrt{7}$

Resposta: Os valores de k são $2\pm\sqrt{7}$.

6. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$

Repara que: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}$

Assim, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FC}$

$=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AF}\right\|+0=\overline{AB}\times\overline{AF}=12$ (área do retângulo)

Resposta: $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=12$