CICLO FORMATIVO

ETAPA FORMATIVA I

Matemática A
Ensino Secundário

Porto Editora®
Abre horizontes

EDUCAÇÃO 2016
Juntos, abrimos horizontes.

TEMA:

CONVEXIDADE, TRIGONOMETRIA E A NOÇÃO DE LIMITE NO PROGRAMA DE MATEMÁTICA A

CICLO FORMATIVO

Matemática A:
Ensino Secundário

Filipe Oliveira
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Funções

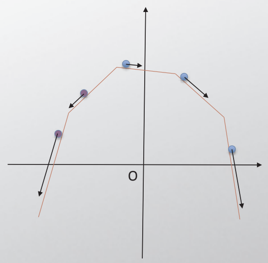
Convexidade

Filipe Oliveira
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Funções de variável real

Convexidade

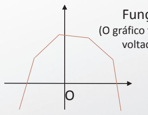
Função côncava



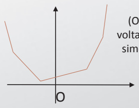
Ideia intuitiva Um berlinde colocado inicialmente num qualquer ponto do gráfico será submetido a uma aceleração tangencial cada vez mais elevada.

Funções de variável real

Convexidade



Função côncava
(O gráfico tem «a concavidade voltada para baixo»)



Função convexa
(O gráfico tem «a concavidade voltada para cima». São as funções simétricas das funções côncavas)

Precisamos agora de dar uma definição de função convexa e de função côncava.

A única definição que figura no Programa atualmente em vigor é a seguinte:

«Uma função duas vezes diferenciável num dado intervalo tem a concavidade voltada para baixo/para cima se $f'' \leq 0 / f'' \geq 0$ nesse mesmo intervalo.»

Este poderá ser um bom critério para o caso de funções duas vezes diferenciáveis. Contudo, enquanto definição, é muito insuficiente.
Na presente situação, f'' nem sempre existe. E, nos pontos em que existe, é nula em ambos os exemplos…

A derivada segunda não permite discriminar entre estas duas situações tão distintas.

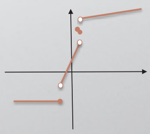
Funções de variável real

Convexidade

Uma analogia: funções monótonas

Definição Uma função f definida num intervalo I diz-se «crescente» nesse intervalo (no sentido lato) se:
$$\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Propriedade (critério para funções diferenciáveis)
Seja f uma função diferenciável num intervalo I. Então:
$$f' \geq 0 \text{ em } I \Longrightarrow f \text{ crescente em } I$$



Recorrendo à definição, pode afirmar-se que esta função é crescente.

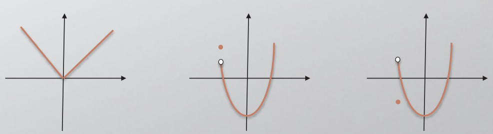
Nesta situação, o critério acima é totalmente inaplicável para se concluir quanto à monotonia.

Funções de variável real

Convexidade

Propriedade de f	Definição	Critério suficiente
Crescente	$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$	$f' \geq 0$ (se f'existir)
"Concavidade voltada para cima"	Em falta!	$f'' \geq 0$ (se f''existir)

Como estão "viradas as concavidades" das seguintes funções?



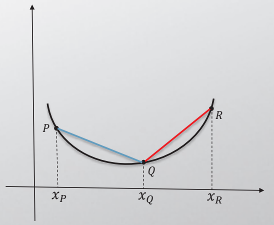
É necessário dar uma definição…

Funções de variável real
Convexidade

Definição Diz-se que o gráfico de f tem a «concavidade voltada para cima» se, para todos $x_P < x_Q < x_R$ em I,

$$d_{PQ} \le d_{QR}$$

$$\left(\frac{f(x_Q)-f(x_P)}{x_Q-x_P} \le \frac{f(y_R)-f(x_Q)}{x_R-x_Q}\right)$$



Funções de variável real
Convexidade

f	Definição	Critério suficiente
Crescente	$x<y \quad \Rightarrow \quad f(x) \le f(y)$	Se f' existir, $f' \ge 0$.
Concavidade voltada para cima	$x<y<z \Rightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$	Se f'' existir, $f'' \ge 0$.

Exercício
Estude a concavidade do gráfico da função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=5x^2$.

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}, x<y<z$.

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \Leftrightarrow \frac{5y^2-5x^2}{y-x} \le \frac{5z^2-5y^2}{z-y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(y-x)(y+x)}{y-x} \le \frac{5(z-y)(z+y)}{z-y}$$

$$\Leftrightarrow 5(y+x) \le 5(z+y) \Leftrightarrow 5x \le 5z \Leftrightarrow V$$

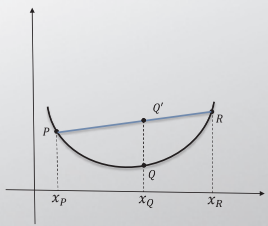
(Note-se que substituindo $a=5$ por um número negativo se obtém a desigualdade inversa.)

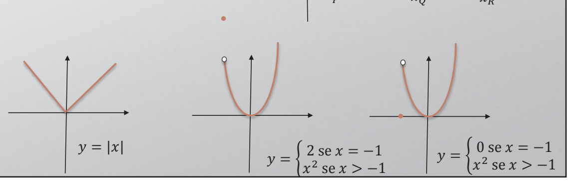
Funções de variável real
Convexidade

Propriedade equivalente O gráfico de f tem a «concavidade voltada para cima» se "ficar abaixo das cordas", isto é:

$$y_Q \le y_{Q'}$$

onde Q' é o ponto de $[PR]$ de abcissa x_Q.





Funções de variável real
Convexidade

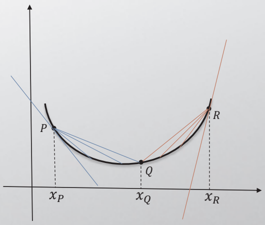
Ligação à diferenciabilidade

- Se f é diferenciável:

$x_P < x_R \Longrightarrow f'(x_P) \leq f'(x_R)$

Pode-se provar que se trata de facto de uma equivalência:

f' crescente $\Leftrightarrow$ o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima



- Se f for duas vezes diferenciável: $f'' \geq 0 \Leftrightarrow$ o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima

Funções de variável real
Convexidade

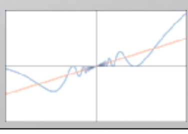
Uma última nota sobre a equivalência
$\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ é crescente em I.

$\Longleftarrow$ É bastante simples, basta observar o sinal das taxas de variação $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ e passar ao limite $h \longrightarrow 0$.

$\Longrightarrow$ É bem menos trivial!
Existem funções tais que, num dado ponto a, $f'(a) > 0$, sem que f seja crescente em nenhum intervalo que contenha a!

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h + h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = 1 > 0$$

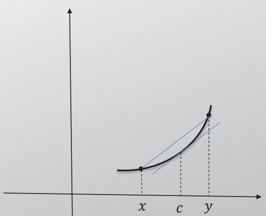
Mas, em qualquer intervalo da forma $]-b, b[$, $x^2 \sin\frac{1}{x}$ toma uma infinidade de vezes valores positivos e valores negativos: o gráfico de f atravessa a bissetriz dos quadrantes ímpares uma infinidade de vezes: f não é crescente.



Funções de variável real
Convexidade

Uma última nota sobre a equivalência
$\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ é crescente em I.

Teorema de Lagrange Seja f diferenciável num intervalo I. Então, para todos $x, y \in I, x < y$, existe $c \in]x, y[, f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.



Assim, se $f' \geq 0$, obtém-se $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$, ou seja, $f(y) \geq f(x)$:

f é crescente.

Trigonometria
Resolução de triângulos

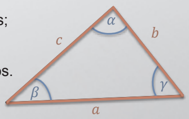
Filipe Oliveira
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Trigonometria
Resolução de triângulos

«Resolver um triângulo» significa:

- determinar a medida de amplitude dos três ângulos;

- determinar a medida de comprimento dos três lados.



Trata-se, historicamente, do primeiro propósito da Trigonometria.
(Trigonometria = $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\nu + \mu\varepsilon\tau\rho o\nu$ = medir triângulos)

Primeiras tabelas trigonométricas
Hiparco (190 a. C.-120 a. C.)

Trigonometria
Resolução de triângulos

Grande aplicabilidade da Trigonometria ao mundo real — ideia-chave:

1. É mais fácil, na prática, medir ângulos do que distâncias.

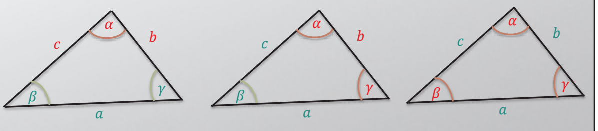
2. A Trigonometria **converte** (informação sobre) **ângulos em** (informação sobre) **distâncias.**

Assentes nestes dois princípios, os Antigos conseguiram obter resultados muito impressionantes para a pouca tecnologia de que dispunham, *e.g.*
- Medida do raio da Terra, Eratóstenes, século III a. C.
- Distância da Terra à Lua, Hiparco, século II a. C.

Trigonometria
Resolução de triângulos

No Programa do 11.º ano, pretende-se **sistematizar** a resolução de triângulos, o que permite **recentrar** a introdução da Trigonometria **naquilo que é a sua génese** e, simultaneamente, fornecer instrumentos que permitam **abordar problemas mais complexos e interessantes**.

Dado um triângulo, determinado por um dos casos de igualdade, pretende-se obter rapidamente as medidas dos lados e ângulos desconhecidos:



Caso ALA

$c = ?, b = ?, \alpha = ?$

Caso LAL

$\alpha = ?, \gamma = ?, b = ?$

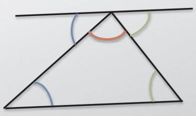
Caso LLL

$\alpha = ?, \beta = ?, \gamma = ?$

Trigonometria
Resolução de triângulos

Existem três ferramentas fundamentais para a resolução de triângulos:

1. A soma dos ângulos de um triângulo é um ângulo raso.



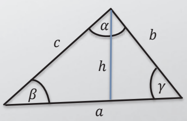
2. A analogia dos senos.

3. O Teorema de Carnot.

Trigonometria
Resolução de triângulos

Analogia dos Senos

Se β e γ forem ângulos agudos,



$$\sin\beta = \frac{h}{c} \therefore h = c\sin\beta$$

$$\sin\gamma = \frac{h}{b} \therefore h = b\sin\gamma$$

De onde se conclui que $c\sin\beta = b\sin\gamma$:

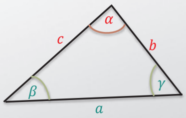
$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Em particular, num triângulo acutângulo,

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$$

Trigonometria
Resolução de triângulos

Resolução de um triângulo conhecidos um lado e os dois ângulos adjacentes (ALA)



$$\alpha = \pi - \beta - \gamma$$

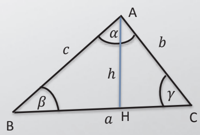
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \qquad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Trigonometria
Resolução de triângulos

Teorema de Carnot

Se β e γ forem ângulos agudos:



$$c^2 = h^2 + \overline{BH}^2$$

$$b^2 = h^2 + \overline{HC}^2$$

De onde se conclui que $c^2 - \overline{BH}^2 = b^2 - \overline{HC}^2$:

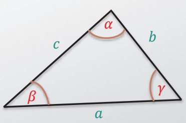
$$c^2 - c^2\cos^2\beta = b^2 - (a - c\cos\beta)^2$$

$$c^2 - c^2\cos^2\beta = b^2 - a^2 - c^2\cos^2\beta + 2ac\cos\beta$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$

Trigonometria
Resolução de triângulos

Resolução de um triângulo conhecidos os três lados (LLL)



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

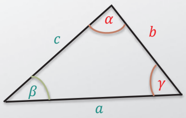
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

α e γ podem agora ser determinados por nova aplicação do Teorema de Carnot, ou, alternativamente, aplicando a analogia dos senos:

$$\sin\alpha = a\frac{\sin\beta}{b} \qquad \sin\gamma = c\frac{\sin\beta}{b}$$

Trigonometria
Resolução de triângulos

Resolução de um triângulo conhecidos dois lados e o ângulo por eles formado (LAL)



Facilmente se reduz ao caso anterior, utilizando o Teorema de Carnot para calcular b:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Pela analogia dos senos:

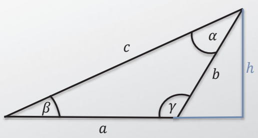
$$\sin\alpha = a\frac{\sin\beta}{b} \qquad \sin\gamma = c\frac{\sin\beta}{b}$$

Trigonometria
Extensão das razões trigonométricas a ângulos retos e obtusos

- No Ensino Básico, apenas se definiram as **razões trigonométricas de ângulos agudos.**
- Pretende-se agora disponibilizar definições para o seno e o cosseno de ângulos retos e obtusos.

Vamos escolher essas definições de forma que se **mantenham válidos** o **Teorema de Carnot** e a **analogia dos senos** em qualquer triângulo.

Trigonometria
Extensão das razões trigonométricas a ângulos retos e obtusos



Que definição dar de $\sin\gamma$?

Pretende-se que $\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b}$

Ou seja, que $\sin\gamma = c\frac{\sin\beta}{b}$.

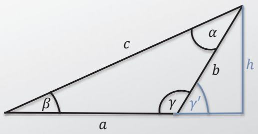
Ora, $c\frac{\sin\beta}{b} = c\frac{h}{bc} = \frac{h}{b} = \sin(\pi - \gamma)$.

A definição que se impõe é, pois, a seguinte:

Definição
Dado um ângulo obtuso γ, define-se «$\sin\gamma$» como o seno do suplementar de γ (que é agudo): $\sin\gamma = \sin(\pi - \gamma)$.

Trigonometria

Extensão das razões trigonométricas a ângulos retos e obtusos



Que definição dar de $\cos\gamma$?

Pretende-se que:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$b^2 = h^2 + b^2\cos^2\gamma'$ e $c^2 = h^2 + (a + b\cos\gamma')^2$

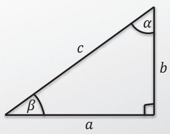
Assim, $h^2 = b^2 - b^2\cos^2\gamma' = c^2 - a^2 - 2ab\cos\gamma' - b^2\cos^2\gamma'$,

de onde resulta que $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma'$.

Definição
Dado um ângulo obtuso γ, define-se «$\cos\gamma$» como o simétrico do cosseno do suplementar de γ (que é agudo): $\cos\gamma = -\cos(\pi - \gamma)$.

Trigonometria

Extensão das razões trigonométricas a ângulos retos e obtusos



Que definição dar de $\sin\frac{\pi}{2}$ e de $\cos\frac{\pi}{2}$?

No caso do ângulo reto, é imediato constatar que:

- a analogia dos senos $\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{c} = \frac{\sin\beta}{b}$ se mantém válida se e só se $\boxed{\sin\frac{\pi}{2} = 1}$

- o Teorema de Carnot $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{2}$ se mantém válido se e só se $\boxed{\cos\frac{\pi}{2} = 0}$

Sucessões

Noção de limite

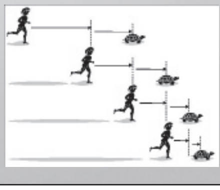
Filipe Oliveira

Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

A introdução da noção de limite marca o início da Análise Matemática propriamente dita.

- Esta noção pode ser vislumbrada logo a partir da Antiguidade, na forma de um conceito mal definido e intuitivamente muito mal compreendido.
(cf. *Paradoxos de Zenão*, séc. V a. C.)



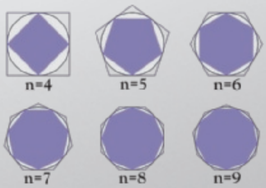
Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

- Aproximação de π pelo método de exaustão (Arquimedes, séc. III a. C.)

$$p_n < \pi < P_n$$

n	p_n	P_n
4	2,828 427	4
5	3,061 467	3,313 708 49
6	3,121 445 15	3,182 597 87
7	3,136 548 42	3,151 724 90
8	3,140 331 15	3,144 118 32
9	3,141 277 25	3,142 223 62
10	3,141 513 80	3,141 750 36
11	3,141 572 94	3,141 632 08



π é enquadrado de forma iterativamente mais precisa, sem no entanto se considerar o limite das sucessões (p_n) e (P_n).

Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

Uma definição satisfatória da noção de limite, que esclareça o conceito e simultaneamente permita utilizá-lo de forma segura e clara, aparece muito tardiamente.

Bernhard Bolzano, 1816, *O Teorema do Binómio*.

Estes **dois mil anos** que a Humanidade demorou a **afinar este conceito,** até o conseguir formular de forma adequada e operacional, deixam importantes avisos:

1. Trata-se de um **conceito fugidio**, em torno do qual é **muito fácil formar falsas ideias e intuições**.
2. Deve ser ensinado de forma **cuidada e criteriosa**, devendo **evitar-se**, em particular, o **recurso a intuições erradas**, que são muito difíceis de corrigir posteriormente.

Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

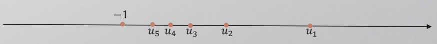
Dada uma sucessão (u_n) e um real l, o que significa dizer que $\lim u_n = l$?

Algumas ideias falsas muito comuns entre alunos do 1.º ano universitário:

«Significa que os termos u_n estão cada vez mais próximos de l»
ou
«Significa que os termos u_n se aproximam cada vez mais de l»,
entre outras variantes.

Esta ideia é duplamente errada:

- Por um lado, os termos da sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$ estão cada vez mais próximos, por exemplo, de -1, mas $\lim \frac{1}{n} \neq -1$.



Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

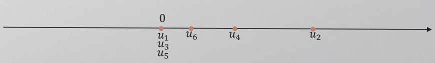
Dada uma sucessão (u_n) e um real l, o que significa dizer que $\lim u_n = l$?

Algumas ideias falsas muito comuns entre alunos do 1.º ano universitário:

«Significa que os termos u_n estão cada vez mais próximos de l»
ou
«Significa que os termos u_n se aproximam cada vez mais de l»,
entre outras variantes.

Esta ideia é duplamente errada:

- Por outro lado, a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ tem por limite 0 e os termos da sucessão aproximam-se e afastam-se constantemente desse valor.



Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

Dada uma sucessão (u_n) e um real l, o que significa dizer que $\lim u_n = l$?

Algumas ideias falsas muito comuns entre alunos do 1.º ano universitário:

Uma variante:

«Significa que os termos u_n se aproximam cada vez mais de l sem nunca atingir esse valor»

- $u_n = \frac{1}{n}$ tende para $l = 0$ e, de facto, os termos desta sucessão aproximam-se cada vez mais deste valor sem nunca o atingir.

Mas,

- A sucessão constante $u_n = 1$ atinge o seu limite logo a partir do primeiro termo.
- A sucessão $u_n = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$ atinge o seu limite em todos os termos de ordem par...

Sucessões
Noção de limite de uma sucessão

Estes erros propagam-se a outros conteúdos mais complexos, construídos a partir da noção de limite:

«O gráfico de uma dada função não interseta uma sua assíntota.»

«Se uma função positiva f tem por limite 0 em $+\infty$, então é decrescente.»

Etc.

Sucessões
Noção de limite de uma sucessão

O Programa em vigor é muito vago relativamente ao que os alunos devem adquirir relativamente ao conceito de limite (e a muitos outros assuntos), referindo apenas o "estudo intuitivo da noção de limite".

À imagem de muitos outros programas, o novo Programa é mais conciso, apontando para o ensino da definição correta de limite.

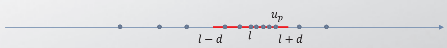
Programa francês em vigor

Limite finie ou infinie d'une suite.	◇ Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.	Pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ».

Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques, B.O. 2011

Sucessões
Noção de limite de uma sucessão

$\lim u_n = l$



Descritor SUC11-6.1
Diz-se que $\lim u_n = l$ se, para todo o $d > 0$, existir uma ordem a partir da qual
$u_n \in]l-d, l+d[$

Isto é, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p \Longrightarrow |u_n - l| < d$.

Não se trata de uma ideia difícil e é inútil protelá-la…

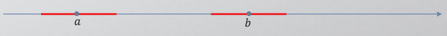
Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

As Metas Curriculares preveem um certo número de demonstrações extremamente simples que permitem, em particular, adquirir de forma mais segura a noção de limite:

SUC11-6.2: Provar que o limite de uma sucessão, se existir, é único.

Sejam I_a e I_b dois intervalos centrados respetivamente em a e b que não se intersetam. Por exemplo, $I_a =]a-r,\ a+r[$ e $I_b =]b-r,\ b+r[$, onde $r = \frac{1}{4}|b-a|$ é um quarto da distância de a a b.



Os termos da sucessão não podem pertencer, a partir de uma ordem p_1, a um dos intervalos e a partir de uma ordem p_2 ao outro.

Qualquer termo de ordem n simultaneamente superior a p_1 e a p_2 teria de pertencer a ambos os intervalos, o que é impossível...

Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

SUC11-6.9:
Estabelecer, utilizando a definição, o limite de sucessões da forma $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$.

Exemplo: Mostre que a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ tende para $l = 2$.

a. Determine uma ordem a partir da qual $u_n \in]1{,}99; 2{,}01[$.

$$|u_n - 2| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{5}{n+3} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 500 < n+3 \Leftrightarrow 497 < n$$

b. Mostre que $\lim u_n = 2$.

Seja $d > 0$. $\quad |u_n - 2| < d \Leftrightarrow \frac{5}{n+3} < d \Leftrightarrow \frac{5}{d} < n+3 \Leftrightarrow \frac{5}{d} - 3 < n$

c. A partir de que ordem 2 é uma aproximação de u_n com erro inferior a 10^{-5}?

$\frac{5}{10^{-5}} - 3 = 500\,000 - 3 = 499\,997.$ A partir da ordem $p = 499\,998$.

Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

Limites infinitos

O significado de $\lim u_n = +\infty$ e de $\lim u_n = -\infty$ é apresentado nos descritores SUC11-6.5 e SUC11-6.6.

Diz-se que $\lim u_n = +\infty$ se os termos u_n são superiores, a partir de certa ordem, a qualquer número real $L > 0$ prefixado, isto é:

Para todo o $L > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq p \Rightarrow u_n > L$$

Sucessões

Noção de limite de uma sucessão

SUC11-6.9:
Estabelecer, utilizando a definição, o limite de sucessões da forma $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$.

Exemplo: $u_n = 2n + 3$

Um exemplo um pouco mais complexo: $u_n = n^2 - 4n + 2$

a. Determine uma ordem a partir da qual $u_n > 2000$.

$u_n > 2000 \Leftrightarrow \ (n-2)^2 - 2 > 2000 \ \Leftrightarrow (n-2)^2 > 2002 \ \Leftrightarrow n > \sqrt{2002} + 2 \approx 46{,}7$

b. Mostre que $\lim u_n = +\infty$.

Seja $L > 0$.

$u_n > L \Leftrightarrow \ (n-2)^2 - 2 > L \quad \Leftrightarrow (n-2)^2 > L + 2 \quad \Leftrightarrow n > \sqrt{L+2} + 2$

Funções

Limites

Filipe Oliveira

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Funções de variável real

Limite segundo Heine

Seja f uma função real de variável real e $l \in \mathbb{R}$.
Consideramos ainda um número real a pertencente a conjunto que explicitaremos mais tarde.

Definição Diz-se que «l é o limite de f quando x tende para a» se para toda a sucessão (x_n) com valores no domínio de f tal que:
- $\lim x_n = a$

$$\lim f(x_n) = l$$

Definição bis Diz-se que «l é o limite de f quando x tende para a» se para toda a sucessão (x_n) com valores no domínio de f tal que:
- $\lim x_n = a$
- para todo o n, $x_n \neq a$

$$\lim f(x_n) = l$$

1. Ambas as versões são casos particulares de uma noção mais geral de limite, o «limite segundo uma base de filtro».

2. Qualquer uma delas é consensualmente aceite como adequada à introdução da noção de limite a nível elementar, havendo preferência por uma ou por outra consoante os autores.

Iremos listar algumas das vantagens da utilização da primeira definição de limite no intuito de esclarecer a razão dessa escolha no contexto de um Programa do 11.º ano.

Uma primeira observação: A primeira definição é mais simples de formular!

Funções de variável real

Limite segundo Heine

Fixemos algum vocabulário e algumas notações.

Definição Diz-se que «l é o limite de f quando x tende para a» se para toda a sucessão (x_n) de valores no domínio de f tal que:
- $\lim x_n = a$

$$\lim f(x_n) = l$$

Nesta situação, diremos que «l é o limite de f em a». Notação $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Definição bis Diz-se que «l é o limite de f quando x tende para a» se para toda a sucessão (x_n) de valores no domínio de f tal que:
- $\lim x_n = a$
- para todo o n, $x_n \neq a$

$$\lim f(x_n) = l$$

Nesta situação, diremos que «l é o limite de f em a por valores diferentes». Notação $l = \lim\limits_{x \to a^*} f(x)$.

Outras notações usuais para este limite: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \dot{a}} f(x)$

Funções de variável real

Limites

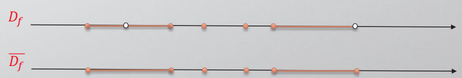
Em que pontos $a \in \mathbb{R}$ é lícito, à partida, considerar o limite de uma dada função f ?

$\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

Para calcular este limite, é necessário que exista pelo menos uma sucessão de elementos de D_f de limite a. (Caso contrário perde-se a unicidade do limite!)

Ao conjunto de pontos nessas condições é usual chamar-se «aderência de D_f» $(\overline{D_f})$ e aos respetivos elementos «pontos aderentes a D_f».

São os pontos a tais que qualquer vizinhança de a interseta D_f.



$$\overline{D_f} = \{x \in \mathbb{R} : \forall d > 0,]x - d, x + d[\cap D_f \neq \emptyset\}$$

Note-se que em particular $D_f \subset \overline{D_f}$.

Funções de variável real

Limites

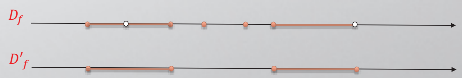
Em que pontos $a \in \mathbb{R}$ é lícito, à partida, considerar o limite de uma dada função f ?

$\boxed{\lim\limits_{x \to a^*} f(x)}$

Para calcular este limite, é necessário que exista pelo menos uma sucessão de elementos de D_f, todos distintos de a e de limite a.

Ao conjunto de pontos nessas condições é usual chamar-se «derivado de D_f» (D'_f) e aos respetivos elementos «pontos de acumulação de D_f».

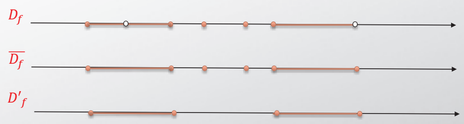
São os pontos a tais que qualquer vizinhança de a interseta $D_f \setminus \{a\}$.



$$D'_f = \{x \in \mathbb{R} : \forall d > 0,]x - d, x + d[\cap D_f \setminus \{a\} \neq \emptyset\}$$

Funções de variável real

Limites



É fácil justificar que $D'_f \subset \overline{D_f}$.

A definição de ponto de acumulação é mais complexa do que a de ponto aderente e a experiência letiva mostra que se trata de um conceito menos acessível aos alunos.

Este facto introduz uma complexidade suplementar no ensino destes conteúdos sem que daí advenha qualquer proveito.

Funções de variável real

Limite segundo Heine

Estamos agora em condições de indicar as duas definições alternativas, de forma completa:
Seja f uma função real de variável real e $l \in \mathbb{R}$.

Definição Dado $a \in \overline{D_f}$, diz-se que «l é o limite de f quando x tende para a» se para toda a sucessão (x_n) com valores no domínio de f tal que:

- $\lim x_n = a$

$$\lim f(x_n) = l$$

Definição Dado $a \in D'_f$, diz-se que «l é o limite de f quando x tende para a por valores diferentes» se para toda a sucessão (x_n) com valores no domínio de f tal que:

- $\lim x_n = a$
- para todo o n, $x_n \neq a$

$$\lim f(x_n) = l$$

Funções de variável real

Limites

Exercício Explicite o derivado e a aderência dos seguintes conjuntos:

1. $D =]-3,7] \cup \{10\}$

2. $D = \{1,2,4\}$

3. $D = \left\{x = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

4. $D = \{0\} \cup \left\{x = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

5. $D = \mathbb{Q}$

Funções de variável real

Limites

Pequeno apontamento relativo ao domínio de funções

Um pouco por todo o mundo, é muito usual, no Ensino Básico e Secundário, **definir-se uma função a partir de uma expressão que a defina**, sendo o respetivo **domínio** o **conjunto** dos números para os quais a expressão faz sentido.

Funções de variável real

Limites

Pequeno apontamento relativo ao domínio de funções

Exemplo:

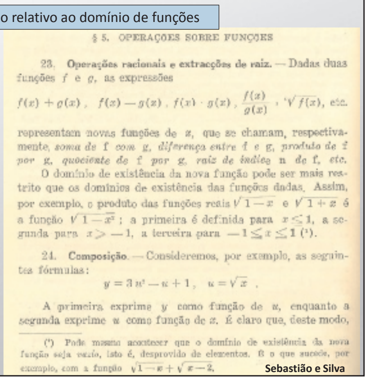
Determine o domínio da função:

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

b. $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3} + \sqrt{x-5}$

Exemplo: $f \circ g(x) = f(g(x))$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$



§ 5. OPERAÇÕES SOBRE FUNÇÕES

23. **Operações racionais e extracções de raiz.** — Dadas duas funções f e g, as expressões

$$f(x) + g(x)\,,\quad f(x) - g(x)\,,\quad f(x)\cdot g(x)\,,\quad \frac{f(x)}{g(x)}\,,\quad \sqrt[n]{f(x)},\ \text{etc.}$$

representam novas funções de x, que se chamam, respectivamente, *soma de* f *com* g, *diferença entre* f *e* g, *produto de* f *por* g, *quociente de* f *por* g, *raiz de índice* n *de* f, *etc.*

O domínio de existência da nova função pode ser mais restrito que os domínios de existência das funções dadas. Assim, por exemplo, o produto das funções reais $\sqrt{1-x}$ e $\sqrt{1+x}$ é a função $\sqrt{1-x^2}$; a primeira é definida para $x \leq 1$, a segunda para $x \geq -1$, a terceira para $-1 \leq x \leq 1$ (¹).

24. **Composição.** — Consideremos, por exemplo, as seguintes fórmulas:

$$y = 3u^2 - u + 1\,,\quad u = \sqrt{x}\,.$$

A primeira exprime y como função de u, enquanto a segunda exprime u como função de x. É claro que, deste modo,

(¹) Pode mesmo acontecer que o domínio de existência da nova função seja vazio, isto é, desprovido de elementos. É o que sucede, por exemplo, com a função $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$.

Sebastião e Silva

Funções de variável real

Limites

Ponto fundamental

O seguinte resultado, de grande utilidade prática no cálculo de limites, está errado:

Propriedade Sejam f e g duas funções e $a \in \mathbb{R}$ tais que os limites:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} g(x)$$

existem.
Então:

$$\lim_{x \to a^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to a^+} g(x)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x)g(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \times \lim_{x \to a^+} g(x)$$

Funções de variável real
Limites

Ponto fundamental

Exemplo: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

$D_f = [1, +\infty[$ $\qquad \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

$D_g =]-\infty, 1]$ $\qquad \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$

$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} + \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$

Mas $\lim_{x \to 1^*} \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\right)$ não existe.

$D_{f+g} = \{1\}$ e $1 \notin D'_{f+g}$

Não existe nenhuma sucessão com valores no domínio de $\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\right)$ que tenda para 1 por valores diferentes de 1...

Funções de variável real
Limites

Ponto fundamental

O resultado torna-se verdadeiro se substituirmos o limite por valores diferentes pelo limite propriamente dito:

Propriedade Sejam f e g duas funções e $a \in \mathbb{R}$ tais que os limites:

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

existem.
Então:

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$$

Funções de variável real
Limites

Ponto fundamental

O mesmo problema propaga-se à continuidade, **sendo muito aborrecido que a soma de duas funções contínuas não seja necessariamente contínua...**

Com a definição usual:

Definição Seja f uma função real de variável real e $a \in D_f$.
Diz-se que «f é contínua em a» se:

$$\lim_{x \to a^*} f(x) = f(a)$$

A função f diz-se ainda «contínua» se for contínua em todos os pontos do respetivo domínio.

As funções definidas pelas expressões $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$ são contínuas, mas $f + g$ não é contínua:

$1 \in D_{f+g}$ e $\lim_{x \to 1^*} (f+g)(x)$ nem sequer existe...

Funções de variável real

Limites

Ponto fundamental

Mais uma vez, o resultado torna-se verdadeiro se se considerar a outra definição de limite:

Propriedade Sejam f e g duas funções contínuas em a.

Então, $f + g$ é contínua em a.

Em particular, a soma de duas funções contínuas é contínua.

Funções de variável real

Limites

Cuidados a ter nesta troca de definição de limite

Algumas funções "deixam de ter limite".

Exemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 \text{ se } x \neq 0 \\ 2 \text{ se } x = 0 \end{cases}$

Tem-se $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^*} f(x) = 3$ mas $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ não existe.

A definição de continuidade pode ser simplificada

Dada uma função f e um ponto $a \in D_f$, se o limite $l = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ existir, então é necessariamente igual a $f(a)$.

De facto, tomando a sucessão (constante) $x_n = a$, $\lim f(x_n) = f(a)$.

Definição Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

Diz-se que «f é contínua em a» se existir o limite $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$.

NOTAS

Porto Editora®
Abre horizontes