TESTE INTERMÉDIO – 11.º ANO

NOME: ______________________________ **N.º:** ___ **TURMA:** ___ **ANO LETIVO:** _____/_____ **DATA:** _____/_____/_____

CLASSIFICAÇÃO: ______________________ **PROFESSOR(A):** _______________ **ENC. EDUCAÇÃO:** ______________

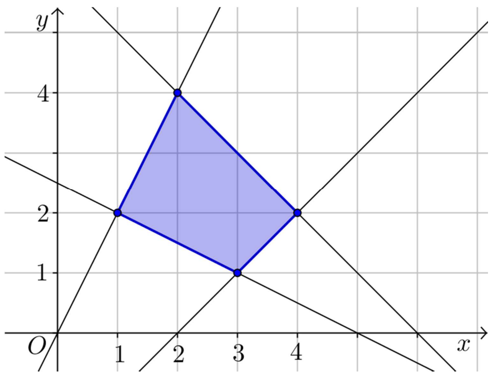
DURAÇÃO DO TESTE: 90 MINUTOS

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos, nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Na figura ao lado está representada, a sombreado, a região admissível de um problema de programação linear, em que se pretende minimizar a função objetivo Z, definida por $Z = x + 3y$.

Qual dos seguintes pares ordenados corresponde à solução ótima deste problema?

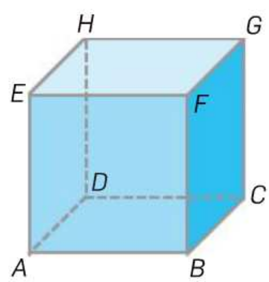


(A) $(1, 2)$ **(B)** $(3, 1)$

(C) $(4, 2)$ **(D)** $(2, 4)$

2. Na figura ao lado está representado o cubo $[ABCDEFGH]$, de aresta a $\left(a \in \mathbb{R}^+\right)$.

Qual das seguintes expressões representa o produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$?



(A) $2a$ **(B)** a^2

(C) $\sqrt{2}\,a^2$ **(D)** $2\,a^2$

3. Seja f a função trigonométrica definida por $f(x)=a\times\cos(x+b)$, sendo a e b números reais positivos.

Qual dos seguintes intervalos de números reais corresponde ao contradomínio da função f ?

(A) $[-1,1]$ **(B)** $[-b,b]$ **(C)** $[-a,a]$ **(D)** $[-a-b,a+b]$

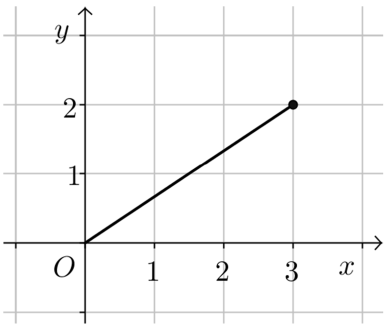
4. Sejam f e g duas funções reais tais que:

- as funções f e g tem domínio $\mathbb{R}$;
- a função f tem três zeros: -1 , 2 e 3;
- 2 é o único zero da função g .

Quantos zeros tem a função $\frac{g}{f}$?

(A) 3 **(B)** 2 **(C)** 1 **(D)** 0

5. Seja h a função ímpar, de domínio $[-3,3]$, cujo gráfico está representado parcialmente na figura ao lado.



Seja h^{-1} a função inversa da função h.

Qual é o valor de $h(-3)+h^{-1}(2)$?

(A) -1 **(B)** 0

(C) 1 **(D)** 4

GRUPO II

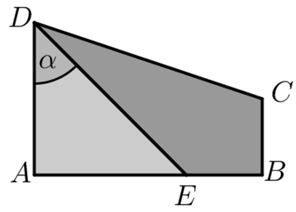
Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

1. Resolve, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação:

$$\sqrt{2}+2\cos(x+\pi)=0$$

2. Na figura ao lado está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$ em que:



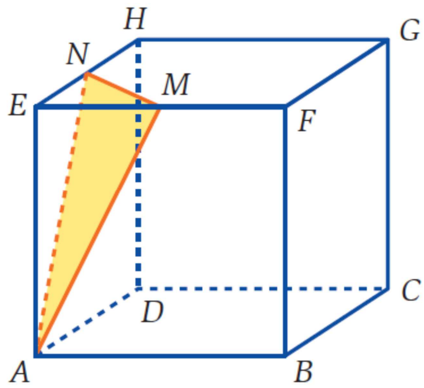
- $\overline{AD}=2$
- $\overline{AB}=3$
- $\overline{BC}=1$

O ponto E é um ponto móvel pertencente ao lado $[AB]$, nunca coincidente com A nem com B, tal que $A\hat{D}E=\alpha$.

2.1 Mostra que a área do quadrilátero $[EBCD]$, em função da amplitude α, é dada por $\frac{9}{2}-2\tan\alpha$.

2.2 Mostra que o valor de α para o qual a área do quadrilátero $[EBCD]$ é igual à área do $[AED]$ é tal que $\cos\alpha=\frac{8\sqrt{145}}{145}$ e indica o valor de α em graus, arredondado às décimas.

3. Na figura ao lado está representado o cubo $[ABCDEFGH]$ com 2 unidades de aresta. M é o ponto médio da aresta $[EF]$ e N é o ponto médio da aresta $[EH]$. A interseção do cubo com o plano AMN é o triângulo representado na figura.



Considera fixado na figura um referencial o.n. $Oxyz$ com origem no vértice A, em que D pertence ao semieixo negativo das abcissas, B pertence ao semieixo positivo das ordenadas, E pertence ao semieixo positivo das cotas e em que a unidade de medida é a mesma da aresta do cubo.

3.1 Mostra que $2x-2y+z=0$ é uma equação cartesiana do plano AMN.

3.2 Determina uma equação da superfície esférica de centro no vértice C do cubo que é tangente ao plano AMN.

Sugestão: Começa por escrever uma condição que defina a reta que passa em C e é perpendicular ao plano AMN e utiliza-a para determinar as coordenadas do ponto de tangência.

4. Considera as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas como se segue:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{se } x>1\\ x-1 & \text{se } x\leq 1\end{cases} \qquad\qquad g(x)=x+1$$

4.1 Determina $(f \circ g)(-1)$.

4.2 Define a função composta $f \circ g$.

4.3 Seja h a restrição da função $g \circ f$ ao intervalo $]1, +\infty[$.

4.3.1 A equação $h(x) = x^3$ tem exatamente uma solução.

Determina, recorrendo à calculadora gráfica, essa solução.

Apresenta a solução arredondada às décimas.

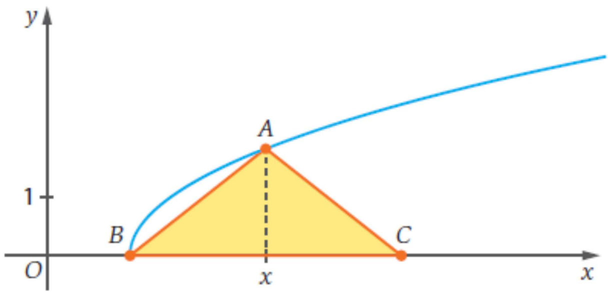
Na tua resposta deves:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiveres necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar o ponto relevante para a resolução do problema.

4.3.2 Indica uma equação da assíntota horizontal do gráfico da função h .

5. Na figura está representada, num referencial o.n., parte do gráfico da função f definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$, que interseta o eixo Ox no ponto B .

O ponto A, de abcissa x, pertence ao gráfico da função e o ponto C é um ponto do eixo Ox de abcissa superior à abcissa de A e tal que $\overline{AC} = \overline{AB}$.



Determina para que valor de x a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 27 .

Na tua resolução, começa por exprimir a área do triângulo em função de x .

FIM

Cotações											Total
Grupo I	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**						
	10	10	10	10	10						**50**
Grupo II	**1.**	**2.1**	**2.2**	**3.1.**	**3.2**	**4.1**	**4.2.**	**4.3.1**	**4.3.2**	**5**	
	10	15	20	20	20	5	20	15	5	20	**150**
											200

Critérios específicos de classificação

GRUPO I

1. a **5.** .... (5 × 10 pontos) ....**50 pontos**

As respostas corretas são as seguintes:

Itens	1	2	3	4	5
Respostas	B	B	C	D	C

GRUPO II

1. ....**10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Escrever $\sqrt{2}-2\cos(x)=0$ .... 3 pontos

Obter $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .... 3 pontos

Escrever $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \vee x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ (ou equivalente) .... 4 pontos

2.º Processo:

Obter $\cos(x+\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .... 3 pontos

Escrever $x+\pi=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \vee x+\pi=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ (ou equivalente)............. 4 pontos

Obter $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \vee x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ (ou equivalente).............................. 3 pontos

2.1 ....**15 pontos**

Calcular a área do trapézio $\left(\frac{9}{2}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $\tan\alpha = \frac{\overline{AE}}{2}$ .... 4 pontos

Escrever $\overline{AE} = 2\tan\alpha$ .... 2 pontos

Escrever uma expressão para a área do triângulo $(2\tan\alpha)$ .... 4 pontos

Apresentar a área do quadrilátero como diferença entre a área do trapézio e a área do triângulo .... 2 pontos

2.2 .... 20 pontos

Equacionar o problema $\left(\frac{9}{2} - 2\tan\alpha = 2\tan\alpha \ , \quad \text{ou equivalente}\right)$ .... 3 pontos

Obter $\tan\alpha = \frac{9}{8}$ .... 4 pontos

Escrever $\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ .... 4 pontos

Obter $\cos^2\alpha = \frac{64}{145}$ .... 4 pontos

Escrever $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{145}}$ .... 2 pontos

Obter $\cos\alpha = \frac{8\sqrt{145}}{145}$ .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido $(48,4^\circ)$ .... 2 pontos

3.1 .... 20 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Indicar as coordenadas do ponto $A(0,0,0)$ .... 1 ponto

Indicar as coordenadas dos pontos $M(0,\ 1,\ 2)$ e $N(-1,\ 0,\ 2)$ .... 4 pontos

Indicar as coordenadas de dois vetores não colineares paralelos ao plano
(Por exemplo $\overrightarrow{AM}(0,\ 1,\ 2)$ e $\overrightarrow{AN}(-1,\ 0,\ 2)$) .... 2 pontos

Escrever $\begin{cases}(a,\ b,\ c)\cdot(0,\ 1,\ 2)=0\\(a,\ b,\ c)\cdot(-1,\ 0,\ 2)=0\end{cases}$ (ou equivalente)

(sendo $(a,\ b,\ c)$ as coordenadas de um vetor normal ao plano)............................3 pontos

Concluir que um vetor normal tem coordenadas da forma $(2c,\ -2c,\ c)$

(com $c\in\mathbb{R}$) ....4 pontos

Concretizar as coordenadas de um vetor normal (por exemplo, $(2,\ -2,\ 1)$)............2 pontos

Concluir que $2x-2y+z=0$ é uma equação do plano.......................................4 pontos

2.º Processo:

Indicar as coordenadas do ponto $A(0,0,0)$ ....1 ponto

Indicar as coordenadas dos pontos $M(0,\ 1,\ 2)$ e $N(-1,\ 0,\ 2)$ ....4 pontos

Verificar que os três pontos são não colineares...5 pontos

Verificar que as coordenadas dos três pontos satisfazem a equação dada ....6 pontos

Referir que a equação dada é uma equação cartesiana de um plano........................2 pontos

Concluir que a equação é uma equação do plano..2 pontos

3.2 ....**20 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Apresentar uma condição vetorial da reta

$\left((x,y,z)=(-2,\ 2,\ 0)+\lambda(2,-2,\ 1),\ \lambda\in\mathbb{R}\right)$ ....3 pontos

Determinar as coordenadas do ponto de tangência ....10 pontos

Reconhecer que um ponto da reta tem coordenadas da forma

$(-2+2\lambda,\ 2-2\lambda,\ \lambda)$ ....1 ponto

Substituir as coordenadas na equação do plano

$\left(2(-2+2\lambda)-2\ (2-2\lambda)+\ \lambda=0\right)$..3 pontos

Obter $\lambda=\frac{8}{9}$ ....2 pontos

Obter $\left(-\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{8}{9}\right)$ ....4 pontos

Calcular o raio da superfície esférica $\left(\frac{8}{3}\right)$ ....4 pontos

Apresentar uma equação da superfície esférica $\left((x+2)^2+(y-2)^2+z^2=\frac{64}{9}\right)$ ..... 3 pontos

2.º Processo:

Apresentar equações cartesianas da reta $\left(\frac{x+2}{2}=-\frac{y-2}{2}=z\right)$ .... 3 pontos

Determinar as coordenadas do ponto de tangência .... 10 pontos

Escrever $\begin{cases} 2x-2y+z=0 \\ \frac{x+2}{2}=-\frac{y-2}{2} \\ \frac{x+2}{2}=z \end{cases}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Resolver o sistema .... 6 pontos

Obter $\left(-\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{8}{9}\right)$ .... 1 ponto

Calcular o raio da superfície esférica $\left(\frac{8}{3}\right)$ .... 4 pontos

Apresentar uma equação da superfície esférica $\left((x+2)^2+(y-2)^2+z^2=\frac{64}{9}\right)$ ...... 3 pontos

4.1 ....5 pontos

Escrever $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))$ .... 1 ponto

Calcular $g(-1)$ .... 2 pontos

Calcular $f(0)$ (-1) .... 2 pontos

4.2 ....20 pontos

Escrever $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ .... 1 ponto

Escrever $f(g(x))=\begin{cases} \frac{1}{g(x)} & \text{se } g(x)>1 \\ g(x)-1 & \text{se } g(x)\le 1 \end{cases}$ .... 5 pontos

Reconhecer que $g(x)>1 \Leftrightarrow x>0$ .... 2 pontos

Reconhecer que $g(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ .... 2 pontos

Concluir que $(f \circ g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ .... 5 pontos

Indicar o domínio $(\mathbb{R})$ .... 5 pontos

4.3.1 .... **15 pontos**

Obter $h(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ .... 4 pontos

Equacionar o problema $\left(\dfrac{1}{x} + 1 = x^3\right)$ .... 2 pontos

Representar graficamente as funções definidas por $y = \dfrac{1}{x} + 1$ e por $y = x^3$

(ou representar graficamente a função definida por $y = \dfrac{1}{x} + 1 - x^3$ ou a função

definida por $y = x^3 - \dfrac{1}{x} - 1$) (**Ver nota**) .... 5 pontos

Assinalar o ponto de interseção (ou o zero) .... 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto $((1{,}2))$ .... 2 pontos

Nota: Se não for respeitado o domínio $]1, +\infty[$ a pontuação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

4.3.2 .... **5 pontos**

Escrever $y = 1$ (ou equivalente) .... 5 pontos

5. .... **20 pontos**

Exprimir a área do triângulo em função de x .... 10 pontos

Reconhecer que $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{BC} \times \overline{DA}}{2}$

(sendo D o ponto de coordenadas $(x, 0)$) .... 1 ponto

Calcular $f(1)$ (0) .... 2 pontos

Reconhecer que $\overline{BD} = x - 1$ .... 2 pontos

Escrever $\overline{DA} = \sqrt{x-1}$ .... 2 pontos

Obter $A_{[ABC]}=(x-1)\sqrt{x-1}$ .... 3 pontos

Determinar o valor de x ……………………………………………….……………… 10 pontos

Escrever $(x-1)\sqrt{x-1}=27$ .... 1 ponto

Escrever $(x-1)\sqrt{x-1}=27 \Rightarrow (x-1)^2(x-1)=27^2$ .... 3 pontos

Obter $(x-1)^3=27^2$ .... 2 pontos

Obter $x-1=\sqrt[3]{27^2}$ .... 2 pontos

Obter $x-1=9$ .... 1 ponto

Obter $x=10$ **(Ver nota)** .... 1 ponto

Nota: Tendo em conta o contexto do problema, sendo dado que existe uma solução, não se considerou necessário fazer a verificação da solução.