Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere os seguintes conjuntos de números reais.

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{1-2x}{3}-\frac{x+1}{2}\leq 1\right\}\quad \text{e}\quad B=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2\geq 2x\right\}$$

Indique qual dos conjuntos representa o conjunto $\overline{A\cap B}$.

(A) $[-1,\ 0]\cup[2,\ +\infty[$

(B) $]-1,\ 0[\cup]2,\ +\infty[$

(C) $]-\infty,\ -1[\cup]0,\ 2[$

(D) $]-\infty,\ -1]\cup[0,\ 2]$

2. Dados a e b, números reais positivos, pode-se concluir que $\dfrac{\left(ab^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{b\sqrt[3]{a}}}$ é:

(A) $\sqrt[6]{ab^3}$

(B) $\sqrt[6]{a^2b}$

(C) $\sqrt[3]{ab}$

(D) $\sqrt[3]{a}\sqrt{b}$

3. Considere a elipse E cuja equação cartesiana é $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ e as proposições:

p: A elipse E interseta a reta r de equação $(x,\ y)=\left(\sqrt{5},\ 3\right)+k(0,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$, num só ponto.

q: As coordenadas dos focos da elipse E são $\left(\sqrt{5},\ 0\right)$ e $\left(-\sqrt{5},\ 0\right)$.

Qual das proposições é **falsa**?

(A) $p\wedge\sim q$

(B) $\sim p\Rightarrow\sim q$

(C) $p\Rightarrow q$

(D) $\sim p\vee\sim q$

4. Considere os pontos $A(3,\ 1)$ e $B(4,\ 2)$ e o vetor $\vec{u}\left(k^2,\ 3k+4\right)$.

Indique, dos seguintes, um valor de k para o qual o vetor $\vec{u}$ é colinear com o vetor $\overrightarrow{AB}$.

(A) $k=-2$

(B) $k=2$

(C) $k=4$

(D) $k=-4$

5. Num plano munido de um referencial ortonormado xOy, considere a equação:

$$x^2+y^2+6x-2y+7=0$$

O centro C e o raio r da circunferência são:

(A) $C(3,\ -1)$ e $r=\sqrt{3}$

(B) $C(3,\ -1)$ e $r=3$

(C) $C(-3,\ 1)$ e $r=\sqrt{3}$

(D) $C(-3,\ 1)$ e $r=3$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Sejam $p,\ q$ e r três proposições tais que $(p\Rightarrow q)\vee(\sim r\wedge p)$ é falsa.

Determine, justificando, o valor lógico:

1.1. das proposições $p,\ q$ e r;

1.2. da proposição $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow\sim r$.

2. Considere o polinómio $P(x)$ definido por:

$$P(x)=x^5+x^4-x-1$$

2.1. Verifique se -1 é uma das raízes de $P(x)$ e indique a sua multiplicidade.

2.2. Determine as outras raízes e fatorize o polinómio $P(x)$.

2.3. Resolva a inequação $P(x)\geq 0$.

Apresenta o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

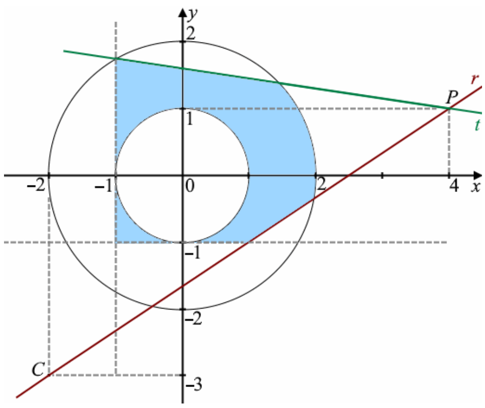
3. Considere, num referencial ortonormado xOy, os pontos $A(1,\ 2)$ e $B(-2,\ 3)$ e o vetor $\vec{u}(-1,\ -5)$.

Calcule as coordenadas de:

3.1. $\vec{y}$, sendo $\overrightarrow{AB}=2\vec{y}-\vec{u}$;

3.2. um vetor colinear com $\overrightarrow{AB}$, de sentido contrário e de norma 10.

4. Considere o referencial ortonormado xOy seguinte.



Sabe-se que:

- o ponto $P(4,\ 1)$ é o ponto de interseção das retas t e r;
- a reta r passa pelo ponto $C(-2,\ -3)$;
- a equação vetorial da reta r é do tipo $(x,\ y)=(-2,\ -3)+k\vec{u},\ k\in\mathbb{R}$;
- a equação reduzida da reta t é do tipo $y=mx+\dfrac{3}{2}$.

4.1. Determine:

4.1.1. um vetor diretor da reta r e o declive da reta t;

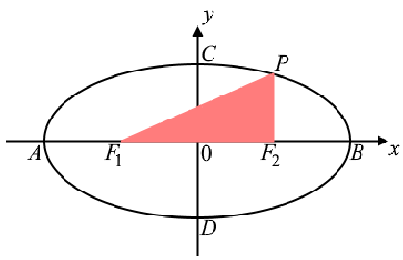
4.1.2. a condição que representa a área sombreada.

4.2. Mostre que uma equação da circunferência de diâmetro $[PC]$ é:

$$(x-1)^2+(y+1)^2=13$$

5. Na figura está representada uma elipse num referencial ortonormado xOy.

A elipse tem centro na origem do referencial.



Sabendo que:

- F_1 e F_2 são focos da elipse;
- A e B são os pontos de interseção da elipse com o eixo das abcissas;
- P é um ponto da elipse tal que a reta PF_2 é paralela ao eixo Oy;
- C e D são os pontos de interseção da elipse com o eixo das ordenadas;
- $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=12$ e $C(0,\ 3)$.

Determine:

5.1. a equação reduzida da elipse;

5.2. as coordenadas dos vértices da elipse;

5.3. a distância focal da elipse;

5.4. a medida da área do triângulo $[F_1PF_2]$.

6. Considere, num referencial ortonormado xOy, os pontos $A\left(3,\ a^2\right)$, $B\left(1,\ b^2\right)$ e $P(a,\ b)$, em que a e b são constantes reais.

6.1. Prove que se $a=b=\sqrt{2}$, então a reta AB interseta a elipse de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ num só ponto.

6.2. Prove que se o ponto médio do segmento $[AB]$, M, pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então P pertence à circunferência de centro na origem e de raio 2.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	2.3.	3.1.	3.2.	4.1.1.	4.1.2.	4.2.	5.1.	5.2.	5.3.	5.4.	6.1	6.2.	Total
8	7	7	10	12	7	12	10	14	10	10	6	7	12	14	14	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. ▪ $\frac{1-2x}{3}-\frac{x+1}{2}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{2-4x}{6}-\frac{3x+3}{6}\leq\frac{6}{6}\Leftrightarrow 2-4x-3x-3\leq 6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7x\leq 6+1\Leftrightarrow x\geq -\frac{7}{7}\Leftrightarrow x\geq -1$

$x\in[-1,\ +\infty[$

▪ $x^2\geq 2x\Leftrightarrow x^2-2x\geq 0\Leftrightarrow x(x-2)\geq 0$

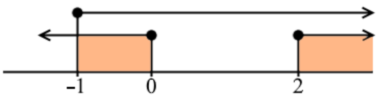
$x\in\,]-\infty,\ 0]\cup[2,\ +\infty[$

C.A.

$x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	–	0	+	+	+
$x-2$	–	–	–	0	+
$P(x)$	+	0	–	0	+

▪ $\overline{A\cap B}=?$



$A\cap B=[-1,\ 0]\cup[2,\ +\infty[$

$\overline{A\cap B}=\,]-\infty,\ -1[\,\cup\,]0,\ 2[$

Resposta: (C)

2. $\frac{\left(ab^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{b\sqrt[3]{a}}}=\frac{\sqrt[3]{ab^3}}{\sqrt[6]{ab^3}}=\frac{\sqrt[6]{a^2b^6}}{\sqrt[6]{ab^3}}=\sqrt[6]{ab^3}$

Resposta: (A)

3. A elipse E cuja equação cartesiana é $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ tem $a^2=5$ e $b^2=4$. Assim, os vértices são $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$, $(0,\ 2)$ e $(0,\ -2)$.

A distância focal é $2c$ e sendo $c^2=a^2-b^2$, então $c^2=5-4\Leftrightarrow c=\pm 1$.

Os focos desta elipse têm coordenadas $(-1,\ 0)$ e $(1,\ 0)$, pelo que se conclui que a proposição q é **falsa**.

A reta de equação vetorial $(x,\ y)=(\sqrt{5},\ 3)+k(0,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$ é a reta de equação cartesiana $x=\sqrt{5}$.

Esta reta interseta a elipse no vértice $(\sqrt{5},\ 0)$ e apenas neste ponto por ser perpendicular ao eixo Ox.

Daqui se conclui que a proposição p é **verdadeira**.

- $(p\wedge\sim q)\Leftrightarrow(\mathrm{V}\wedge\sim\mathrm{F})\Leftrightarrow(\mathrm{V}\wedge\mathrm{V})\Leftrightarrow\mathrm{V}$
- $(\sim p\Rightarrow\sim q)\Leftrightarrow(\sim\mathrm{V}\Rightarrow\sim\mathrm{F})\Leftrightarrow(\mathrm{F}\Rightarrow\mathrm{V})\Leftrightarrow\mathrm{V}$
- $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\mathrm{V}\Rightarrow\mathrm{F})\Leftrightarrow\mathrm{F}$
- $(\sim p\vee\sim q)\Leftrightarrow(\sim\mathrm{V}\vee\sim\mathrm{F})\Leftrightarrow(\mathrm{F}\vee\mathrm{V})\Leftrightarrow\mathrm{V}$

Resposta: (C)

4. $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,\ 2) - (3,\ 1) = (1,\ 1)$. Se $\vec{u}$ é colinear com $\overrightarrow{AB}$, então:

$$\frac{k^2}{1} = \frac{3k+4}{1} \Leftrightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow k = 4 \vee k = -1$$

A resposta é $k = 4$.

Resposta: (C)

5. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + 6x + 3^2\right) + \left(y^2 - 2y + 1^2\right) + 7 - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 3$

$C(-3,\ 1)$ e $r = \sqrt{3}$

Resposta: (C)

Grupo II

1.1. $(p \Rightarrow q) \vee (\sim r \wedge p) \Leftrightarrow \text{F}$

Para a disjunção ser falsa, $\text{F} \vee \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$. Assim, $\underbrace{p \Rightarrow q}_{\boxed{1}} \Leftrightarrow \text{F}$ e $\underbrace{\sim r \wedge p}_{\boxed{2}} \Leftrightarrow \text{F}$.

$\boxed{1}$ Se a implicação $p \Rightarrow q$ é falsa, então p é verdadeira e q é falsa $(\text{V} \Rightarrow \text{F})$.

$\boxed{2}$ Se $\sim r \wedge p$ é falsa, como p é verdadeira, então $\sim r$ é falsa, ou seja, r é verdadeira.

Conclui-se, assim, que p é verdadeira, q é falsa e r é verdadeira.

1.2. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \sim r \Leftrightarrow (\text{V} \Leftrightarrow \text{F}) \Rightarrow \sim \text{V} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{F} \Rightarrow \text{F} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{V}$

2. $P(x) = x^5 + x^4 - x - 1$

2.1.

	1	1	0	0	–1	–1	
–1		–1	0	0	0	1	
	1	0	0	0	–1	0	→ –1 é raiz de $P(x)$.
–1		–1	1	–1	1		
	1	–1	1	–1	0		
–1		–1	2	–3			
	1	–2	3	–4			→ O resto não é 0.

A multiplicidade da raiz –1 é 2.

2.2. Pela alínea **2.1.**, $P(x)=(x+1)^2(x^3-x^2+x-1)$.

Se x^3-x^2+x-1 tiver raízes inteiras, estas poderão ser -1 e 1. Contudo, já vimos que -1 não é raiz, pelo que resta verificar para 1.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array} \to 1 \text{ é raiz é } P(x).$$

Assim, $P(x)=(x+1)^2(x-1)(x^2+1)$.

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ é impossível, logo $P(x)$ não tem mais raízes reais.

As raízes de $P(x)$ são -1 (multiplicidade 2) e 1 (raiz simples).

2.3. $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)(x^2+1)\geq 0$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ e $x^2+1=0$ impossível

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Solução: $x\in\{-1\}\cup[1, +\infty[$

3. $A(1,\ 2)$, $B(-2,\ 3)$ e $\vec{u}(-1,\ -5)$

3.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(-2,\ 3)-(1,\ 2)=(-3,\ 1)$

$(-3,\ 1)=2\vec{y}-(-1,\ -5) \Leftrightarrow (-3,\ 1)+(-1,\ -5)=2\vec{y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\vec{y}=(-4,\ -4) \Leftrightarrow \vec{y}=\left(-\frac{4}{2},\ -\frac{4}{2}\right) \Leftrightarrow \vec{y}=(-2,\ -2)$

3.2. Seja $\vec{v}$ um vetor colinear com $\overrightarrow{AB}$.

$\vec{v}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{v}=(-3k,\ k)$

$\|\vec{v}\|=10 \Leftrightarrow \sqrt{(-3k)^2+k^2}=10 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2+k^2}=10 \Leftrightarrow \sqrt{10k^2}=10 \Leftrightarrow |k|\sqrt{10}=10 \Leftrightarrow |k|=\frac{10}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |k|=\frac{10\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow k=\sqrt{10} \vee k=-\sqrt{10}$

Então, $\vec{v}=(3\sqrt{10},\ -\sqrt{10}) \vee \vec{v}=(-3\sqrt{10},\ \sqrt{10})$.

Como $\vec{v}$ tem sentido contrário ao vetor $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=(3\sqrt{10},\ -\sqrt{10})$.

4.1.1. $r:\ (x,\ y)=(-2,\ -3)+k\vec{u},\ k\in\mathbb{R}$

Como os pontos C e P pertencem à reta r, então o vetor diretor pode ser $\overrightarrow{CP}$.

$\overrightarrow{CP}=P-C=(4,\ 1)-(-2,\ -3)=(6,\ 4)$

Assim, $\vec{u}=\overrightarrow{CP}=(6,\ 4)$ (por exemplo).

Sabemos que a reta t passa pelo ponto $P(4,\ 1)$ e como a sua equação reduzida é $y=mx+\frac{3}{2}$:

$$1=4m+\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2=8m+3\Leftrightarrow 8m=2-3\Leftrightarrow m=-\frac{1}{8}$$

Assim, o declive da reta t é $-\frac{1}{8}$.

4.1.2. $x>-1\wedge y>-1\wedge x^2+y^2\geq 1\wedge x^2+y^2\leq 4\wedge y\leq -\frac{1}{8}x+\frac{3}{2}\wedge y\geq \frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

C.A.

$(x,\ y)=(-2,\ -3)+k(6,4),\ k\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}x=-2+6k\\ y=-3+4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{x+2}{6}\\ k=\frac{3+y}{4}\end{cases}\Leftrightarrow \underset{(2)}{\frac{x+2}{6}}=\underset{(3)}{\frac{y+3}{4}}\Leftrightarrow 2x+4=3y+9\Leftrightarrow 3y=2x-9+4\Leftrightarrow 3y=2x-5\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

4.2. Ponto médio de $[PC]$: $M=\left(\frac{4-2}{2},\ \frac{1-3}{2}\right)=\left(\frac{2}{2},\ -\frac{2}{2}\right)=(1,\ -1)$

$$r=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PC}\right\|\Leftrightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(4)^2}\Leftrightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{36+16}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{52}\Leftrightarrow r=\frac{\cancel{2}\sqrt{13}}{\cancel{2}}\Leftrightarrow r=\sqrt{13}$$

$$\begin{array}{r|l}52&2\\26&2\\13&13\\1&\end{array}$$

A circunferência tem centro $M(1,\ -1)$ e raio $r=\sqrt{13}$, pelo que a sua equação é:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=13$$

5.1. $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=12$ significa que $2a=12$. Logo, $a=6$.

Como $C(0,\ 3)$, então $b=3$. Assim, a equação reduzida da elipse é:

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

5.2. $A(-6,\ 0)$, $B(6,\ 0)$, $C(0,\ 3)$ e $D(0,\ -3)$

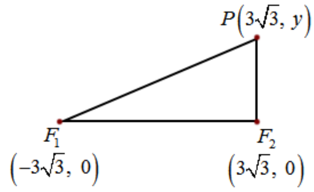
5.3. A distância focal é $2c$.

$$c^2=a^2-b^2\Leftrightarrow c^2=36-9\Leftrightarrow c^2=27\Leftrightarrow c=\pm\sqrt{27}\Leftrightarrow c=\pm 3\sqrt{3}$$

$$2c=2\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

A distância focal é $6\sqrt{3}$.

5.4. $F_1\left(-3\sqrt{3},\ 0\right)$ e $F_2\left(3\sqrt{3},\ 0\right)$



P pertence à elipse de equação $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$, logo:

$$\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{27}{36}+\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36} \Leftrightarrow 4y^2=36-27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y^2=9 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{2}$$

Como $P\in 1.^{\text{o}}\ \text{Q}$, então $P\left(3\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$.

$$A=\frac{\overline{F_1F_2}\times\overline{PF_2}}{2} \Leftrightarrow A=\frac{6\sqrt{3}\times\frac{3}{2}}{2} \Leftrightarrow A=\frac{18\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

6. $A\left(3,\ a^2\right)$, $B\left(1,\ b^2\right)$, $P\left(a,\ b\right)$; $a,\ b\in\mathbb{R}$

6.1. $a=b=\sqrt{2}$, então $A\left(3,\ 2\right)$ e $B\left(1,\ 2\right)$.

A reta AB tem de equação $y=mx+b$.

$$m=\frac{2-2}{3-1} \Leftrightarrow m=0$$

Logo, a reta AB tem de equação $y=2$.

Um ponto da reta AB é $\left(x,\ 2\right)$, pelo que:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{2^2}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{4}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}=1-1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

A interseção da reta AB com a elipse só tem um único ponto que tem coordenadas $\left(0,\ 2\right)$.

6.2. Seja M o ponto médio de $\left[AB\right]$, então:

$$M\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{a^2+b^2}{2}\right)=M\left(\frac{4}{2},\ \frac{a^2+b^2}{2}\right)=M\left(2,\ \frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares é $y=x$.

Se M pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então:

$$\frac{a^2+b^2}{2}=2 \Leftrightarrow a^2+b^2=4$$

A circunferência de centro em $\left(0,\ 0\right)$ e raio 2 é definida por $x^2+y^2=4$:

Assim, como $P\left(a,\ b\right)$, então P pertence à circunferência de centro em $\left(0,\ 0\right)$ e raio 2 se $a^2+b^2=4$.

Portanto, se o ponto médio do segmento $\left[AB\right]$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então o ponto P pertence à circunferência de centro na origem e de raio 2.