

Teste N.º 2

**Matemática A**

---

Duração do Teste: 90 minutos

---

**NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA**

---

**10.º Ano de Escolaridade**

---

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

---

---

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Fixado um referencial o.n.  $Oxyz$ , considere os pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas  $(\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, \sqrt{5})$  e  $(\sqrt{8}, \sqrt{12}, 0)$ , respetivamente. Em relação à superfície esférica de diâmetro  $[AB]$ , considere as seguintes proposições:

$p$ : “O centro da superfície esférica é o ponto de coordenadas  $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ .”

$q$ : “O raio da superfície esférica é  $7\frac{1}{2}$ .”

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

- (A)  $p \wedge q$
- (B)  $\sim p \vee q$
- (C)  $p \Rightarrow q$
- (D)  $p \Leftrightarrow \sim q$

2. Considere os conjuntos  $A$  e  $B$  tais que:

$$A = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 3\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R}: (x - 2)(x + 2) \geq x^2 + 2x\}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A)  $\overline{A} \cup \overline{B} = ]-2, 2]$
- (B)  $\overline{A} \cup \overline{B} = [3, +\infty[$
- (C)  $A \setminus B = ]-\infty, -2]$
- (D)  $B \cap \overline{A} = ]2, 3[$

3. Fixado um referencial ortonormado do plano, considere os pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas  $(-5, 2)$  e  $(0, 3)$ , respetivamente, e a reta  $r$  definida por  $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right) + k(-5, 1), k \in \mathbb{R}$ .

3.1. Indique, justificando, o valor lógico da proposição: “A mediatriz do segmento de reta de extremos  $A$  e  $B$  é uma reta paralela à reta  $r$ ”.

3.2. Determine uma equação da circunferência tangente ao eixo das ordenadas e com centro no ponto  $C$ , sendo  $C = B + 2\overrightarrow{BA}$ .

3.3. Para cada valor real de  $p$ , considere também o ponto  $D$  de coordenadas  $(p, 3)$ .

Defina em extensão os seguintes conjuntos.

3.3.1.  $\{p \in \mathbb{N}: d(A, D) = \sqrt{37}\}$

3.3.2.  $\{p \in \mathbb{R}: D \in r\}$

4. Fixado um referencial o.n. do plano, considere a seguinte condição:

$$2x - y \leq 4 \quad \wedge \quad x \geq -4 \quad \wedge \quad 2 - y \geq 0$$

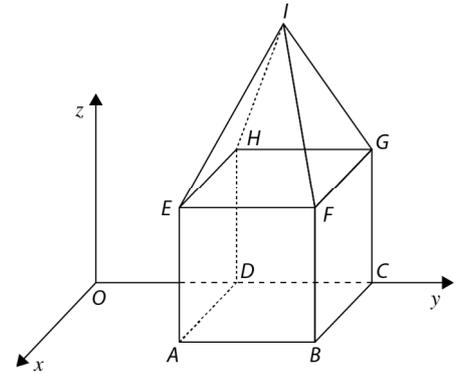
Sabe-se que a representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido pela condição anterior é um triângulo.

Represente-o num referencial e determine o valor exato da sua área.

5. Na figura está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um sólido constituído por um cubo de aresta 3 e uma pirâmide de altura  $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$ .

Sabe-se que:

- a face  $[ABCD]$  está contida no plano  $xOy$ ;
- a aresta  $[DC]$  está contida no eixo  $Oy$ ;
- o ponto  $D$  tem coordenadas  $(0, 4, 0)$ .



- 5.1. Sabendo que os pontos de coordenadas  $(3, 4, 0)$  e  $(0, 7, 0)$  são vértices do cubo, qual é o plano mediador do segmento de reta cujos extremos são estes dois vértices?

(A)  $ABC$

(B)  $ACE$

(C)  $BDF$

(D)  $BCI$

- 5.2. Determine uma equação vetorial da reta que passa no vértice da pirâmide e que tem a direção do vetor  $\overrightarrow{AG}$ .

- 5.3. Defina por uma condição:

5.3.1. o plano que contém o vértice da pirâmide e é paralelo ao plano  $xOz$ ;

5.3.2. a reta  $HG$ ;

5.3.3. o conjunto de pontos do espaço que estão a uma distância do ponto  $F$  inferior ou igual a 2 unidades.

- 5.4. Determine o valor exato do volume do sólido.

Apresente o resultado na forma  $a + b\sqrt{c}$ , com  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

6. No plano munido de um referencial o.n.  $Oxy$ , considere o conjunto de pontos do segundo quadrante cuja ordenada é inferior ao simétrico da abscissa e a abscissa é não inferior a  $-2$ .  
Em qual das opções seguintes se encontra uma condição que define esse conjunto de pontos?
- (A)  $x \geq -2 \wedge y < -x$   
 (B)  $-2 \leq x < 0 \wedge 0 < y < -x$   
 (C)  $-2 \leq x < 0 \vee x < y < 0$   
 (D)  $-2 < x < 0 \wedge y < 0 \wedge y < -x$

7. Fixada uma unidade de comprimento, considere um cubo de diagonal espacial  $d$ .  
O volume do cubo pode ser dado em função de  $d$  por:

- (A)  $\frac{d^3}{3}$   
 (B)  $\sqrt{3} d^3$   
 (C)  $3^{-\frac{1}{2}} d^3$   
 (D)  $3^{-\frac{3}{2}} d^3$

**FIM**

### COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	2.	3.1	3.2.	3.3.1	3.3.2	4.	5.1	5.2.	5.3.1.	5.3.2.	5.3.3.	5.4	6.	7.	
8	8	15	15	15	15	20	8	15	15	15	15	20	8	8	<b>200</b>

## TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

### 1. Opção (D)

- O centro da superfície esférica é o ponto médio de  $[AB]$ . Assim, as suas coordenadas são:

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{2}, \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{12}}{2}, \frac{\sqrt{5} + 0}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

A proposição  $p$  é, então, verdadeira.

- O raio da superfície esférica é  $\frac{d(A,B)}{2}$ .

$$\begin{aligned}d(A,B) &= \sqrt{(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{12} - 2\sqrt{3})^2 + (0 - \sqrt{5})^2} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{5})^2} = \\ &= \sqrt{2 + 0 + 5} = \\ &= \sqrt{7} = \\ &= \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

Assim, o raio é  $\frac{1}{7^{\frac{1}{2}}}$ .

A proposição  $q$  é, então, falsa.

Nas opções apresentadas, tem-se que:

(A)  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (V \wedge F) \Leftrightarrow F$

(B)  $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (F \vee F) \Leftrightarrow F$

(C)  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (V \Rightarrow F) \Leftrightarrow F$

(D)  $(p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (V \Leftrightarrow V) \Leftrightarrow V$

Assim, a opção correta é a (D).

### 2. Opção (B)

$$A = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 3\} = ] - 2, 3[$$

$$\begin{aligned}B &= \{x \in \mathbb{R}: (x - 2)(x + 2) \geq x^2 + 2x\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 \geq x^2 + 2x\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}: 2x \leq -4\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2\} = \\ &= ] - \infty, -2]\end{aligned}$$

- $\overline{A \cup B} = (]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[) \cup ]-2, +\infty[ = \mathbb{R}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{]-2, 3[ \cup ]-\infty, -2]} = \overline{]-\infty, 3[} = [3, +\infty[$
- $A \setminus B = ]-2, 3[ \setminus ]-\infty, -2] = ]-2, 3[$
- $B \cap \overline{A} = ]-\infty, -2] \cap (]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[) = ]-\infty, -2]$

### 3.

**3.1.** A mediatriz de  $[AB]$  é o conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que  $d(P, A) = d(P, B)$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+5)^2 + (y-2)^2} &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 6y + 9 \\ &\Leftrightarrow 2y = -10x - 20 \\ &\Leftrightarrow y = -5x - 10 \end{aligned}$$

A equação reduzida da mediatriz de  $[AB]$  é  $y = -5x - 10$ . O declive desta reta é  $-5$ .

Um vetor diretor da reta  $r$  tem coordenadas  $(-5, 1)$ . Logo, o declive da reta  $r$  é  $-\frac{1}{5}$ .

As retas em causa têm declives diferentes, logo não são paralelas.

A proposição tem valor lógico falso.

**3.2.**  $C = B + 2\overrightarrow{BA} = (0, 3) + 2(-5, -1) = (-10, 1)$

Com centro no ponto de coordenadas  $(-10, 1)$ , para ser tangente ao eixo das ordenadas, o raio é 10.

Assim, a equação da circunferência pretendida é:

$$(x + 10)^2 + (y - 1)^2 = 100$$

#### Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= A - B = \\ &= (-5, 2) + (0, 3) = \\ &= (-5, -1) \end{aligned}$$

### 3.3.

**3.3.1.**  $d(A, D) = \sqrt{37} \Leftrightarrow \sqrt{(p+5)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{37}$

$$\Leftrightarrow (p+5)^2 + 1 = 37$$

$$\Leftrightarrow (p+5)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow p+5 = 6 \vee p+5 = -6$$

$$\Leftrightarrow p = 1 \vee p = -11$$

$$\{p \in \mathbb{N} : d(A, D) = \sqrt{37}\} = \{1\}$$

**3.3.2.** Para que  $D(p, 3)$  pertença a  $r$ , terá de se verificar  $(p, 3) = \left(1, \frac{1}{2}\right) + k(-5, 1)$ , para algum

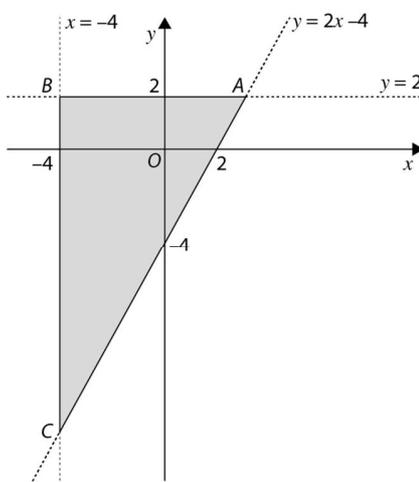
$k \in \mathbb{R}$ . Assim, terá que:

$$\begin{cases} p = 1 - 5k \\ 3 = \frac{1}{2} + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 - 5 \times \frac{5}{2} \\ k = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{23}{2} \\ k = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\{p \in \mathbb{R}: D \in r\} = \left\{-\frac{23}{2}\right\}$$

**4.**  $2x - y \leq 4 \wedge x \geq -4 \wedge 2 - y \geq 0 \Leftrightarrow -y \leq -2x + 4 \wedge x \geq -4 \wedge -y \geq -2$

$$\Leftrightarrow y \geq 2x - 4 \wedge x \geq -4 \wedge y \leq 2$$



Sejam  $A, B$  e  $C$  os vértices do triângulo representado na figura:

- $A$  é o ponto de interseção das retas definidas por  $y = 2$  e  $y = 2x - 4$ :

$$A(x, 2), \text{ com } 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Assim,  $A(3, 2)$ .

- $B$  é o ponto de interseção das retas definidas por  $x = -4$  e  $y = 2$ . Logo,  $B(-4, 2)$ .

- $C$  é o ponto de interseção das retas definidas por  $x = -4$  e  $y = 2x - 4$ :

$$C(-4, y), \text{ com } y = 2x - 4 \Leftrightarrow y = 2 \times (-4) - 4 \Leftrightarrow y = -12$$

Assim,  $C(-4, -12)$ .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{|3 - (-4)| \times |2 - (-12)|}{2} = \\ &= \frac{7 \times 14}{2} = \\ &= 49 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

5.

### 5.1. Opção (C)

Por observação da figura, e porque o ponto  $D$  tem coordenadas  $(0, 4, 0)$  e o cubo tem aresta 3, tem-se que o ponto de coordenadas  $(3, 4, 0)$  é o ponto  $A$  e o ponto de coordenadas  $(0, 7, 0)$  é o ponto  $C$ .

Note-se que  $ABC$  não é o plano mediador de  $[AC]$ , uma vez que  $A$  não é equidistante de  $A$  e  $C$ .  $ACE$  também não é o plano mediador de  $[AC]$ , uma vez que  $d(E, A)$  é diferente de  $d(E, C)$ . O plano  $BCI$  não é o plano mediador de  $[AC]$ , pois  $C$  não é equidistante de  $A$  e de  $C$ .

Cada um dos pontos  $B, D$  e  $F$  é equidistante dos pontos  $A$  e  $C$ .

Portanto, o plano mediador de  $[AC]$  é o plano  $BDF$ .

$$5.2. I\left(\frac{3}{2}, 4 + \frac{3}{2}, 3 + \frac{4}{\sqrt{5}-1}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)$$

$$\overrightarrow{AG} = G - A = (0, 7, 3) - (3, 4, 0) = (-3, 3, 3)$$

Uma equação vetorial da reta que passa no vértice da pirâmide e tem a direção do vetor  $\overrightarrow{AG}$  é:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) + k(-3, 3, 3), k \in \mathbb{R}$$

5.3.

$$5.3.1. y = 4 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{11}{2}$$

$$5.3.2. x = 0 \wedge z = 3$$

$$5.3.3. F(3, 7, 3)$$

$$(x - 3)^2 + (y - 7)^2 + (z - 3)^2 \leq 4$$

$$5.4. \text{Volume}_{\text{sólido}} = \text{Volume}_{\text{cubo}} + \text{Volume}_{\text{pirâmide}} =$$

$$= 3^3 + \frac{1}{3} \times 3^2 \times \frac{4}{\sqrt{5}-1} =$$

$$= 27 + 3 \times \frac{4}{\sqrt{5}-1} =$$

$$= 27 + \frac{12(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} =$$

$$= 27 + \frac{12\sqrt{5}+12}{(\sqrt{5})^2-1^2} =$$



$$\begin{aligned}
&= 27 + \frac{12\sqrt{5}+12}{4} = \\
&= 27 + 3\sqrt{5} + 3 = \\
&= 30 + 3\sqrt{5}
\end{aligned}$$

### 6. Opção (B)

$$x < 0 \wedge y > 0 \wedge y < -x \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0 \wedge 0 < y < -x$$

### 7. Opção (D)

Seja  $V$  o volume,  $d$  a diagonal espacial e  $a$  a aresta do cubo.

$$\begin{aligned}
V = a^3 &= \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3 = \\
&= \left(\frac{d}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^3 = \\
&= d^3 \times 3^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

$$d = \sqrt{3}a \Leftrightarrow a = \frac{d}{\sqrt{3}}$$