Teste de Matemática A

2023 / 2024

Teste N.º 1

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r − raio da base; g − geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r − raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r − raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considere todos os números naturais de cinco algarismos que é possível formar com os algarismos de 0 a 9, e que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

- são pares;
- têm exatamente dois algarismos 5;
- são superiores a $49\,999$.

Quantos são estes números?

(A) 2430 **(B)** 2295 **(C)** 2160 **(D)** 1755

2. Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 11.

Sabe-se que:

- cada bola tem uma única cor;
- as bolas numeradas com número ímpar são azuis e as numeradas com número par são brancas.

2.1 Retira-se, ao acaso e sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola retirada.

Determine a probabilidade de as bolas retiradas serem da mesma cor.

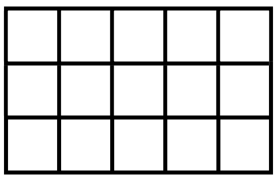
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2 Considere, agora, que as 11 bolas são retiradas de modo aleatório e colocadas em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor as bolas, de modo que as bolas com número ímpar fiquem dispostas, não necessariamente juntas, por ordem decrescente?

(A) $86\,400$ **(B)** $55\,440$ **(C)** $15\,120$ **(D)** 720

3. Uma caixa de madeira, como a representada na figura, é constituída por quinze divisórias iguais, destinadas a guardar cápsulas de café.



Pretende-se distribuir 12 cápsulas de café nessa caixa, de modo que cada cápsula ocupe uma única divisória e que cada divisória não seja ocupada por mais do que uma cápsula.

Indique em qual das opções se encontra uma expressão que permite determinar de quantas maneiras distintas pode ser feita essa distribuição, sabendo que quatro cápsulas são vermelhas, indistinguíveis entre si, seis são pretas, também indistinguíveis entre si, e das restantes uma é azul e a outra é cinzenta.

(A) ${}^{15}C_{12} \times {}^{12}A_2 \times {}^{10}C_4$

(B) ${}^{15}C_4 \times {}^{11}C_6 \times {}^{5}C_2 \times 12!$

(C) ${}^{15}C_{12} \times {}^{12}C_2 \times {}^{10}C_4 \times 3!$

(D) ${}^{15}A_4 \times {}^{11}A_6 \times {}^{5}A_2$

4. Seja n um número natural tal que $n \geq 5$.

Resolva a seguinte equação, sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

$$\frac{{}^{n+1}A_5}{(6n+6) \times {}^{n}C_5} = \frac{(n+1)!}{n!} - 4$$

5. Entre os dias 20 de julho e 20 de agosto de 2023 decorreu na Nova Zelândia o Campeonato Mundial de Futebol Feminino.

Esta foi a primeira vez que Portugal participou num Mundial, tendo sido convocadas para o efeito 23 jogadoras, das quais 3 ocupam a posição em campo de guarda-redes, 8 de defesas, 6 de médias e 6 de avançadas.

5.1 Na primeira conferência de imprensa, as jogadoras dispõem-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

Escreva uma expressão que permita determinar o número de maneiras distintas que se podem dispor as 23 jogadoras, de modo que as jogadoras que ocupam a posição de guarda-redes fiquem juntas, bem como as que ocupam a posição de defesas.

5.2 No início de cada jogo, para a entrada em campo, são escolhidas 11 jogadoras de entre as 23 convocadas.

De quantas formas diferentes pode o selecionador nacional fazê-lo, de forma que a equipa inicial seja constituída por 1 guarda-redes, 3 defesas, 5 médias e 2 avançadas?

5.3 Considere que a comitiva da seleção nacional, da qual fazem parte o treinador, o preparador físico, o fisioterapeuta, entre outros, é constituída por um total de 80 profissionais.

A comitiva é formada por elementos do sexo feminino e do sexo masculino, sendo o número de elementos do sexo feminino maior do que o número de elementos do sexo masculino.

À chegada ao hotel, vão ser selecionados, aleatoriamente, dois desses elementos para fazer o *check-in* de toda a comitiva.

Sabe-se que a probabilidade de selecionar um elemento de cada sexo é igual a $\frac{75}{158}$.

Determine o número elementos do sexo feminino que integra a comitiva da seleção nacional.

6. De uma certa linha n do triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos três últimos elementos é igual a 29.

Qual é o valor de ${}^{n+2}A_{n-2}$?

(A) 56 **(B)** 126 **(C)** 6720 **(D)** 15120

7. Seja a o termo independente do desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$, com $x \neq 0$ e $a \in \mathbb{N}$.

Determine, recorrendo a processos analíticos, o número de divisores de a.

8. Para $n \in \mathbb{N}$, sabe-se que ${}^{n}C_p + {}^{n}C_{n-p} + 2\,{}^{n}C_{p+1} = 6864$.

O valor de ${}^{n+1}C_{n-p}$ é igual a:

(A) 3432 **(B)** 2288 **(C)** 1716 **(D)** 858

9. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}7$
- $P(B) = 0{,}6$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}58$

Determine o valor de $P\left((A \cup B)|\bar{B}\right)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

10. Durante a semana da Jornada Mundial da Juventude Lisboa 2023 foram muitos os peregrinos voluntários estrangeiros que chegaram a Portugal.

Acerca deles, sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos peregrinos que participaram na JMJ são europeus;
- 30% dos peregrinos europeus foram recebidos por famílias de acolhimento;
- em cada quatro dos peregrinos não europeus, três não foram recebidos por famílias de acolhimento.

Escolhe-se um peregrino ao acaso para entregar o primeiro *Kit peregrino* ao Papa.

Qual é a probabilidade de ter sido escolhido um peregrino não europeu, sabendo que este foi recebido por uma família de acolhimento?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1**	**2.2**	**3.**	**4.**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**TOTAL**
10	18	10	10	20	18	18	20	10	18	10	18	20	**200**

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

$3 \times 9 \times 9 \times 5 + 4 \times 3 \times 9 \times 5 = 1755$

2.

2.1 Número de casos possíveis: 11×10

Número de casos favoráveis: $6 \times 5 + 5 \times 4$

Uma vez que se pretende que as bolas retiradas sejam da mesma cor, existem duas alternativas mutuamente exclusivas: ambas serem azuis ou ambas serem brancas.

Número de casos favoráveis: $6 \times 5 + 5 \times 4$

A probabilidade pedida é igual a $\frac{6 \times 5 + 5 \times 4}{11 \times 10} = \frac{5}{11}$

2.2 Opção (B)

${}^{11}C_6 \times 5! = 5540$

${}^{11}C_6$ corresponde ao número de formas distintas de posicionar as cinco bolas ímpares em 11 posições possíveis. Para cada uma destas formas existe uma única possibilidade para as mesmas se disporem por ordem decrescente, e para cada uma destas existem $5!$ modos distintos para as restantes cinco bolas pares permutarem entre si nos cinco lugares sobrantes.

3. Opção (A)

${}^{15}C_{12} \times {}^{12}A_2 \times {}^{10}C_4$

4. $\frac{{}^{n+1}A_5}{(6n+6) \times {}^{n}C_5} = \frac{(n+1)!}{n!} - 4$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1-5)!}}{(6n+6) \times \frac{n!}{(n-5)! \times 5!}} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} - 4$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{(n+1)!}{(n-4)!}}{(6n+6) \times \frac{n!}{(n-5)! \times 5!}} = n + 1 - 4$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)! \times (n-5)! \times 5!}{(6n+6) \times n! \times (n-4)!} = n + 1 - 4$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)! \times (n-5)! \times 5!}{6 \times (n+1) \times n! \times (n-4)!} = n - 3$

$\Leftrightarrow \frac{(n-5)! \times 5!}{6 \times (n-4)!} = n - 3$

$\Leftrightarrow \frac{(n-5)! \times 5!}{6 \times (n-4)(n-5)!} = n - 3$

$\Leftrightarrow \frac{5!}{6\times(n-4)} = n-3$

$\Leftrightarrow \frac{120}{6\times(n-4)} = n-3$

$\Leftrightarrow \frac{20}{n-4} = n-3$

$\Leftrightarrow 20 = (n-3)\times(n-4),\ (n \neq 4)$

$\Leftrightarrow n^2 - 4n - 3n + 12 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 7n - 8 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\times1\times(-8)}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow n = 8 \quad \vee \quad n = -1$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 8$.

5.

5.1 $3! \times 8! \times 14!$

5.2 ${}^{3}C_1 \times {}^{8}C_3 \times {}^{6}C_5 \times {}^{6}C_2 = 15120$

5.3 Seja n, $n \in \mathbb{N}$, o número de elementos do sexo feminino da comitiva.

$\frac{n\times(80-n)}{{}^{80}C_2} = \frac{75}{158}$

$\Leftrightarrow \frac{80n- \ ^2}{3160} = \frac{75}{158}$

$\Leftrightarrow 80n - n^2 = \frac{75\times3160}{158}$

$\Leftrightarrow -n^2 + 80n = 1500$

$\Leftrightarrow -n^2 + 80n - 1500 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{-80 \pm \sqrt{(-8\ \ )^2 - 4\times(-1)\times(-1500)}}{2\times(-1)}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-80 \pm \sqrt{400}}{-2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-80}{-2} \quad \vee \quad n = \frac{-80+2}{-2}$

$\Leftrightarrow n = 30 \quad \vee \quad n = 50$

Como o número de elementos do sexo feminino é maior do que o número de elementos do sexo masculino, o número elementos do sexo feminino que integra a comitiva da seleção nacional é 50.

6. Opção (D)

$1 + n + {}^{n}C_2 = 29 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 29$

$\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 58$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 56 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-5\ \ )}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1-15}{2} \quad \vee \quad n = \frac{-1+15}{2}$

$\Leftrightarrow n = -8 \quad \vee \quad n = 7$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 7$.

${}^{7+2}A_{7-2} = {}^{9}A_5 = 15\,120$

7. $n = 10$; $a = x^2; b = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = x^{-1} \times x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{4}{3}}$

Termo geral do desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$, com $x \neq 0$: ${}^{10}C_k \times (x^2)^{10-k} \times \left(x^{-\frac{4}{3}}\right)^k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

${}^{10}C_k \times (x^2)^{10-k} \times \left(x^{-\frac{4}{3}}\right)^k = {}^{10}C_k \times x^{20-2k} \times x^{-\frac{4k}{3}} = {}^{10}C_k \times x^{20-\frac{10k}{3}}$

$20 - \frac{10k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 6$

$a = {}^{10}C_6 = 210$

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

$210 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$

Como cada divisor do número 210 é do tipo $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, onde $a \in \{0,1\}$, $b \in \{0,1\}$, $c \in \{0,1\}$ e $d \in \{0,1\}$, pelo princípio geral da multiplicação o número de divisores de 210 é igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = = 16$.

8. Opção (A)

$${}^{n}C_p + {}^{n}C_{n-p} + 2 \times {}^{n}C_{p+1} = 4760 \Leftrightarrow {}^{n}C_p + {}^{n}C_p + 2 \times {}^{n}C_{p+1} = 6864$$

$$\Leftrightarrow 2 \times {}^{n}C_p + 2 \times {}^{n}C_{p+1} = 6864$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \left({}^{n}C_p + {}^{n}C_{p+1}\right) = 6864$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \left({}^{n+1}C_{p+1}\right) = 6864$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_{p+1} = 3432$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_{n+1-(p+1)} = 3432$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_{n-p} = 3432$$

9. $P\left((A\cup B)|\bar{B}\right)=\frac{P\left((A\cup B)\cap\bar{B}\right)}{P(\bar{B})}=$

$=\frac{P\left((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{B})\right)}{P(\bar{B})}=$

$=\frac{P\left((A\cap\bar{B})\cup\emptyset\right)}{P(\bar{B})}=$

$=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=$

$=\frac{P(A\cap\bar{B})}{1-0{,}6}=$

$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-0{,}6}=$

$=\frac{0{,}7-P(A\cap B)}{0{,}4}=$

$=\frac{0{,}7-0{,}42}{0{,}4}=$

$=\frac{0{,}28}{0{,}4}=\frac{7}{10}$

C.A.: $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0{,}58 \Leftrightarrow P(\overline{A\cap B})=0{,}58$

$\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=0{,}58$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=1-0{,}58$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}42$

10. Consideremos os seguintes acontecimentos:

E: "Ser peregrino europeu."

A: "Ser peregrino acolhido por família de acolhimento."

Sabe-se que:

- $P(E)=\frac{3}{5}$
- $P(A|E)=\frac{3}{10}$
- $P(\bar{A}|\bar{E})=\frac{3}{4}$

$P(A|E)=\frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap E)}{\frac{3}{5}}=\frac{3}{10}$

$\Leftrightarrow P(A\cap E)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow P(A\cap E)=\frac{9}{50}$

$P(\bar{A}|\bar{E})=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A}\cap\bar{E})}{P(\bar{E})}=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{P(\bar{A}\cap\bar{E})}{1-\frac{3}{5}}=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{P(\bar{A}\cap\bar{E})}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow P(\bar{A}\cap\bar{E})=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow P(\bar{A}\cap\bar{E})=\frac{3}{10}$

Organizando os dados numa tabela:

	E	$\overline{E}$	**Total**
A	$\frac{9}{50}$		
$\overline{A}$		$\frac{3}{10}$	
Total	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$P(A \cap \bar{E}) = P(\bar{E}) - P(\bar{A} \cap \bar{E}) = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

$P(A) = \frac{9}{50} + \frac{1}{10} = \frac{7}{25}$

	E	$\overline{E}$	**Total**
A	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{25}$
$\overline{A}$		$\frac{3}{10}$	
Total	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$P(\bar{E}|A) = \frac{P(A \cap \bar{E})}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{25}} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$