

---

**Teste de Matemática A**

---

2016 / 2017

---

Teste N.º 2

**Matemática A**

---

Duração do Teste: 90 minutos

---

**10.º Ano de Escolaridade**

---

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

---



## Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais **só uma** está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a esse item.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

1. Considere a proposição  $a$  cuja tabela de verdade é:

$p$	$q$	$a$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Qual das seguintes proposições é equivalente à proposição  $a$ ?

- (A)  $\sim p \vee \sim q$
- (B)  $\sim p \wedge \sim q$
- (C)  $\sim p \vee q$
- (D)  $p \wedge \sim q$

2. Considere os conjuntos  $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x = 6\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}: \frac{x+2}{2} \leq x + 3\}$ . Qual das seguintes proposições é verdadeira?

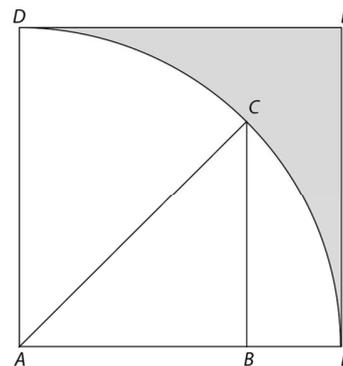
- (A)  $\exists x \in \mathbb{R}: x \in A \wedge x \notin B$
- (B)  $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \vee x \in B$
- (C)  $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \vee x \notin B$
- (D)  $\exists x \in \mathbb{R}: x \notin A \wedge x \in B$

3. Na figura estão representados um triângulo retângulo isósceles  $[ABC]$  tal que  $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , um quarto de circunferência de centro  $A$  e raio  $\overline{AC}$  e um quadrado  $[AEFD]$ .

As retas  $DF$  e  $FE$  são tangentes à circunferência em  $D$  e em  $E$ , respectivamente.

Qual é a medida da área da região sombreada?

- (A)  $\frac{1}{4}(4 - \pi)$                       (B)  $\frac{1}{4}(\pi - 2)$   
 (C)  $2\left(1 - \frac{1}{4}\pi\right)$                       (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}(4 - \pi)$



4. Qual das seguintes expressões representa a expressão  $\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$  com denominador racionalizado para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}^+$  tais que  $b \neq a^2$ ?

- (A)  $a + \sqrt{b}$                       (B)  $a\sqrt{b} - b$   
 (C)  $\frac{a\sqrt{b}-b}{a^2+b}$                       (D)  $\frac{a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$

5. Considera o polinómio  $P(x) = x^3 + x^2 + kx + 15$ . Sabe-se que o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - 2$  é igual a  $-7$ . Qual é o valor de  $k$ ?

- (A)  $-17$   
 (B)  $-2$   
 (C)  $2$   
 (D)  $9$

### Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** Quando para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. Mostre que a proposição  $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \Rightarrow (q \vee r)$  é equivalente a  $\sim p \vee q \vee r$ , utilizando apenas as propriedades das operações lógicas.

2. Considere as proposições:

$$p: \sqrt{(-2)^2} = -2$$

$$q: \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^3}$$

$$r: \sqrt{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$$

Indique, justificando, o valor lógico de  $(p \vee \sim q \vee \sim r) \Rightarrow (\sim p \wedge q \wedge r)$ .

3. Considere a condição  $p(x): x^3 - x = 0 \Rightarrow x < 0$ .

3.1. Escreva a implicação contrarrecíproca da condição dada.

3.2. Indique, justificando, o valor lógico da proposição  $\exists x \in \mathbb{R}: p(x)$ .

3.3. Escreva uma proposição equivalente à negação da proposição referida na alínea anterior, sem utilizar o símbolo de negação.

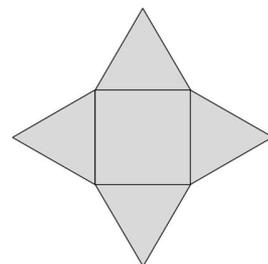
4. Considere a expressão  $A = (2x^6y^8)^{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{8x^{-2}}$ , onde  $x$  e  $y$  representam números reais positivos.

4.1. Mostre que  $A = \frac{\sqrt{2}}{(xy)^2}$ .

4.2. Determine o valor de  $A$  para  $x = \sqrt[3]{4}$  e  $y = \sqrt{2}$ . Apresente o resultado na forma de potência de base 2.

5. Na figura está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem  $a$ .

Prove que a área total da pirâmide é dada em função de  $a$  por  $(1 + \sqrt{3})a^2$ .



6. Considere o polinómio  $P(x) = -3x^4 + 6x^3 + 21x^2 - 60x + 36$ . Sabe-se que 2 é uma raiz dupla de  $P(x)$ .

6.1. Apresente, justificando, uma expressão simplificada para o valor de  $P(\sqrt{2})$ .

6.2. Escreva  $P(x)$  como produto de polinómios de grau não superior a 1.

6.3. Determine os valores de  $x$  que satisfazem a condição  $P(x) > -3x^4 - 15x + 36$ .

– FIM –

## COTAÇÕES

**Grupo I ..... 50**

Cada resposta certa ..... 10

Cada resposta errada ..... 0

Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Grupo II ..... 150**

1. .... 15

2. .... 15

3. .... 35

3.1. .... 10

3.2. .... 15

3.3. .... 10

4. .... 30

4.1. .... 15

4.2. .... 15

5. .... 15

6. .... 40

6.1. .... 10

6.2. .... 15

6.3. .... 15

**TOTAL ..... 200**

## TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

### Grupo I

#### 1. Opção (B)

$p$	$q$	$a$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \vee q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	F

Como as colunas relativas à proposição  $a$  e à proposição  $\sim p \wedge \sim q$  são iguais, então  $a \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ .

#### 2. Opção (D)

$$x^2 - x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

Logo,  $A = \{-2, 3\}$ .

$$\frac{x+2}{2} \leq x+3 \Leftrightarrow x+2 \leq 2x+6$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq -4$$

Logo,  $B = [-4, +\infty[$ .

Como  $A$  está contido em  $B$ , então a proposição  $\exists x \in \mathbb{R}: x \in A \wedge x \notin B$  é falsa.

$A \cup B \neq \mathbb{R}$ , logo a proposição  $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \vee x \in B$  é falsa.

A proposição  $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \vee x \notin B$  é falsa, uma vez que, por exemplo,  $-1 \notin A$  e  $-1 \in B$ .

A proposição  $\exists x \in \mathbb{R}: x \notin A \wedge x \in B$  é verdadeira, pois, por exemplo,  $-1 \notin A$  e  $-1 \in B$ .

#### 3. Opção (A)

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 1$$

Logo,  $\overline{AC} = 1 = \overline{AE}$ .

Assim,  $A_{[AEFD]} = 1 \times 1 = 1$  e  $A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$ .

Portanto,  $A_{\text{sombreada}} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}(4 - \pi)$  u.a.



#### 4. Opção (D)

$$\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} \times \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{a^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$$

#### 5. Opção (A)

Uma vez que o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - 2$  é igual a  $-7$ , tem-se, pelo Teorema do Resto, que:

$$\begin{aligned} P(2) = -7 &\Leftrightarrow 2^3 + 2^2 + k \times 2 + 15 = -7 \Leftrightarrow 8 + 4 + 2k + 15 = -7 \\ &\Leftrightarrow 2k = -34 \\ &\Leftrightarrow k = -17 \end{aligned}$$

#### Grupo II

$$\begin{aligned} 1. (p \vee q) \wedge (p \vee r) &\Rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r) \Rightarrow q \vee r \\ &\Leftrightarrow \sim (p \vee (q \wedge r)) \vee (q \vee r) \\ &\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim (q \wedge r)) \vee (q \vee r) \\ &\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim (q \wedge r) \vee (q \vee r)) \\ &\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r \vee q \vee r) \\ &\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee r) \wedge V \\ &\Leftrightarrow \sim p \vee q \vee r \end{aligned}$$

$$2. \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2, \text{ logo } p \text{ é uma proposição falsa.}$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^8, \text{ logo } q \text{ é uma proposição falsa.}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}, \text{ logo } r \text{ é uma proposição verdadeira.}$$

Assim:

$$\begin{aligned} p \vee \sim q \vee \sim r &\Leftrightarrow F \vee V \vee V \\ &\Leftrightarrow V \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \sim p \wedge q \wedge r &\Leftrightarrow V \wedge F \wedge V \\ &\Leftrightarrow F \end{aligned}$$

Portanto:

$$(p \vee \sim q \vee \sim r) \Rightarrow (\sim p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow V \Rightarrow F \\ \Leftrightarrow F$$

3.

3.1.  $x \geq 0 \Rightarrow x^3 - x \neq 0$

3.2.  $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

A proposição  $\exists x \in \mathbb{R}: x^3 - x = 0 \Rightarrow x < 0$  é verdadeira, uma vez que substituindo  $x$  por  $-1$ , por exemplo, em  $p(x)$  obtemos a proposição  $p(-1)$  que é verdadeira, por se tratar de uma implicação em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é verdadeiro.

3.3.  $\sim (\exists x \in \mathbb{R}: x^3 - x = 0 \Rightarrow x < 0) \Leftrightarrow \sim (\exists x \in \mathbb{R}: x^3 - x \neq 0 \vee x < 0) \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x = 0 \wedge x \geq 0$

4.

4.1.  $A = (2x^6y^8)^{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{8x^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2x^6y^8}} \times \sqrt[4]{8x^{-2}} = \\ = \sqrt[4]{\frac{8x^{-2}}{2x^6y^8}} = \\ = \sqrt[4]{\frac{4}{x^8y^8}} = \\ = \frac{\sqrt[4]{2^2}}{x^2y^2} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{(xy)^2}$

4.2.  $A = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt[3]{4 \times \sqrt{2}})^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2^4 \times 2}} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2^3 \sqrt[3]{2 \times 2}} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{4 \sqrt[3]{2}} = \\ = \frac{1}{4} \times \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \\ = 2^{-2} \times 2^{\frac{1}{6}} = \\ = 2^{-\frac{11}{6}}$



5. Seja  $x$  a altura de um dos triângulos que são as faces laterais da pirâmide.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}a^2$$

Logo,  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

Assim, a área pedida é dada por:

$$a^2 + 4 \times \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = a^2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = a^2 + \sqrt{3}a^2 = (1 + \sqrt{3})a^2$$

6.

6.1.  $P(\sqrt{2}) = -3 \times (\sqrt{2})^4 + 6 \times (\sqrt{2})^3 + 21 \times (\sqrt{2})^2 - 60 \times \sqrt{2} + 36 =$

$$= -3 \times 4 + 6 \times 2\sqrt{2} + 21 \times 2 - 60\sqrt{2} + 36 =$$

$$= -12 + 12\sqrt{2} + 42 - 60\sqrt{2} + 36 =$$

$$= 66 - 48\sqrt{2}$$

6.2.

2	-3	6	21	-60	36
2		-6	0	42	-36
2	-3	0	21	-18	0
2		-6	-12	18	
	-3	-6	9		0

Logo,  $P(x) = (x - 2)(x - 2)(-3x^2 - 6x + 9) = -3(x - 2)(x - 2)(x^2 + 2x - 3)$ .

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

Assim,  $P(x) = -3(x - 2)(x - 2)(x - 1)(x + 3)$ .

6.3.  $P(x) > -3x^4 + 36 \Leftrightarrow -3x^4 + 6x^3 + 21x^2 - 60x + 36 > -3x^4 - 15x + 36$

$$\Leftrightarrow 6x^3 + 21x^2 - 45x > 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(2x^2 + 7x - 15) > 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x + 5)(3x - 2) > 0$$

### Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 7x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = \frac{3}{2}$$

$x$	$-\infty$	$-5$		$0$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3x$	-	-	-	$0$	+	+	+
$x + 5$	-	$0$	+	+	+	+	+
$3x - 2$	-	-	-	-	-	$0$	+
$3x(x + 5)(3x - 2)$	-	$0$	+	$0$	-	$0$	+

Logo,  $x \in ]-5, 0[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$ .

