

QUESTÃO-AULA – Matemática A 11.º ANO

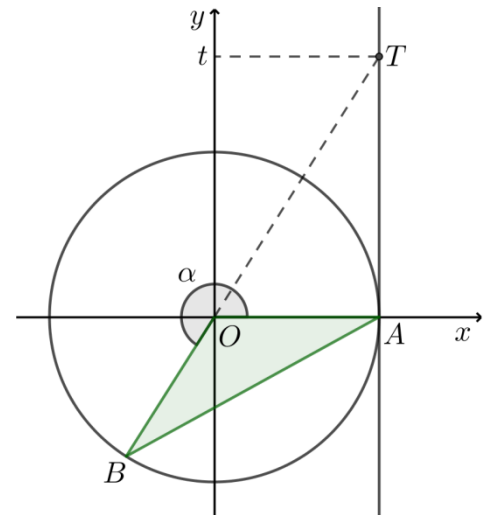
Nome: _____ Turma: _____ N.º _____ Data: ____/____/____

Classificação: _____ Prof.: _____ Enc. Ed.: _____

Na figura ao lado, estão representados, em referencial ortonormado, Oxy , a circunferência trigonométrica, a reta de equação $x = 1$ e o triângulo $[AOB]$.

Sabe-se que:

- o ponto A é a interseção do eixo das abcissas com a reta vertical;
- o ponto T pertence à reta vertical e tem ordenada $t > 0$;
- o ponto B , pertencente ao 3.º quadrante, é a interseção da circunferência trigonométrica com a reta OT ;
- $\widehat{AOB} = \alpha$.



1. Determina a área do triângulo $[AOB]$, para $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

2. Determina a área do triângulo $[AOB]$, para $t = \frac{12}{5}$.

3. Mostra que a área do triângulo $[AOB]$ é dada, em função de α , pela expressão

$$-\frac{\sin \alpha}{2} \quad \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \right)$$

4. Determina o valor de t , sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. Mostra que o perímetro do triângulo $[AOB]$ é dado, em função de α , pela expressão

$$2 + \sqrt{2 - 2\cos \alpha} \quad \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \right)$$

6. Determina o perímetro do triângulo $[AOB]$, para $\sin(\alpha + \pi) = \frac{3}{5}$.

COTAÇÕES

1.	2.	3.	4.	5.	6.
20	40	30	30	50	30

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

1.

$$\text{Área}_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \left| \sin \frac{7\pi}{6} \right|}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

2.

$$\tan \alpha = t = \frac{12}{5}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{12}{5} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{169}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{25}{169}} = \pm \frac{5}{13}$$

Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, tem-se $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha = \frac{12}{5} \times \left(-\frac{5}{13} \right) = -\frac{12}{13}$$

$$\text{Área}_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \frac{12}{13}}{2} = \frac{6}{13}$$

3.

$$\text{Área}_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times |\sin \alpha|}{2}$$

Como, para $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\sin \alpha < 0$, tem-se $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$.

Conclui-se, portanto, que $\text{Área}_{[AOB]} = -\frac{\sin \alpha}{2}$.

4.

$$-\frac{\sin \alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3} \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$t = \tan \frac{4\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

5.

$$\overline{AO} = \overline{BO} = 1;$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

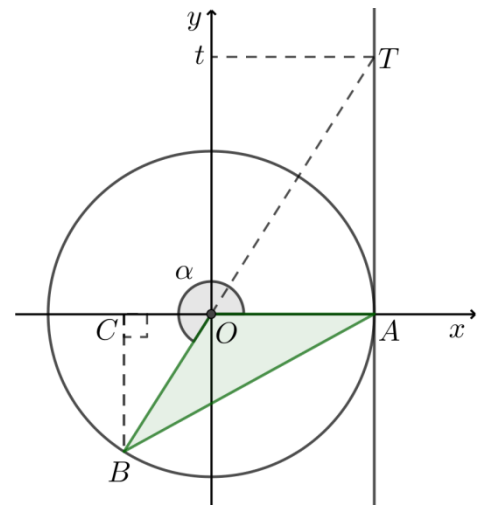
$$\overline{AB} = \sqrt{|\sin \alpha|^2 + (1 + |\cos \alpha|)^2} = \sqrt{\sin^2 \alpha + 1 + 2|\cos \alpha| + \cos^2 \alpha}$$

Como, para $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\cos \alpha < 0$, tem-se $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 1 + 2(-\cos \alpha)} =$$

$$= \sqrt{1 + 1 - 2\cos \alpha} = \sqrt{2 - 2\cos \alpha}$$

$$\text{Perímetro}_{[AOB]} = 2 + \sqrt{2 - 2\cos \alpha}$$



6.

$$\sin \alpha = -\sin(\alpha + \pi) = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}}$$

Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, tem-se $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\text{Perímetro}_{[AOB]} = 2 + \sqrt{2 - 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)} = 2 + \sqrt{2 + \frac{8}{5}} = 2 + \sqrt{\frac{18}{5}} = 2 + 3\sqrt{\frac{2}{5}} = 2 + \frac{3}{5}\sqrt{10}$$