Avaliação – Teste sumativo 2.º Período

Matemática A | 11.º Ano

Nome: ______________________________ Turma: ____ Data: ____/____/____

Classificação: ______________________ Professor: __________ Enc. Educação: __________

Sugestão de cotações

1.	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	5.	6.1	6.2.1	6.2.2	7.1	7.2.1	7.2.2	7.2.3	Total
10	12	13	12	13	12	10	10	13	10	12	12	12	12	13	12	12	**200**

Propostas de resolução

1. Como as retas r e s são perpendiculares, então $m_s = -\frac{1}{m_r}$, sendo m_s o declive da reta s e m_r o declive da reta r.

Tem-se $10y + 5x = 6 \Leftrightarrow 10y = -5x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{10}x + \frac{6}{10} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$. Logo, o declive da reta r é $-\frac{1}{2}$, pelo que o declive da reta s é $-\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$. Assim, a equação reduzida da reta s é da forma $y = 2x + b$.

O ponto de coordenadas $(1,4)$ pertence à reta s, pelo que, substituindo na sua equação:

$$4 = 2\times 1 + b \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow s: y = 2x + 2$$

Resposta: A

2.1 Tem-se que $E = M + \overrightarrow{ME}$, sendo M é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$:

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2}\right) = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (1,2,1)$$

Um vetor normal ao plano ABC é $\vec{u}(1,1,1)$. Como a pirâmide é reta e $[ABCD]$ é um losango, o vetor $\overrightarrow{ME}$ também é um vetor normal a ABC. Assim, $\overrightarrow{ME}$ e $\vec{u}$ são colineares, pelo que existe um $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\overrightarrow{ME} = k\vec{u} = k(1,1,1) = (k,k,k)$.

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 | 11.º ano
© Raiz Editora, 2025. Todos os direitos reservados.

Por outro lado, a altura da pirâmide é $3\sqrt{3}$, pelo que $\left\|\overrightarrow{ME}\right\| = 3\sqrt{3}$. Então:

$$\left\|\overrightarrow{ME}\right\| = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{k^2+k^2+k^2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3k^2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \cancel{\sqrt{3}} \times \sqrt{k^2} = 3\cancel{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 3^2 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3^2} \Leftrightarrow k = -3 \ \vee \ k = 3$$

Logo, se:

- $k = -3$, então $\overrightarrow{ME}(-3,-3,-3)$ e $E = M + \overrightarrow{ME}$, ou seja, neste caso, as coordenadas do ponto E são $(1-3, 2-3, 1-3) = (-2,-1,-2)$, que não pertence ao primeiro octante;

- $k=3$, então $\overrightarrow{ME}(3,3,3)$ e $E = M + \overrightarrow{ME}$, ou seja, neste caso as coordenadas do ponto E são $(1+3, 2+3, 1+3) = (4,5,4)$, que pertence ao primeiro octante.

$\therefore \ E(4,5,4)$

2.2 Como a pirâmide é reta e como $[ABCD]$ é um losango, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é normal ao plano BDE.

Tem-se $\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(2-0, 3-1, -1-4) = (2,2,-4)$ e, portanto, uma equação cartesiana do plano BDE é da forma $2x + 2y - 4z + d = 0$.

Como o ponto E pertence ao plano BDE, substituindo as suas coordenadas na equação de BDE, tem-se $2\times4 + 2\times5 - 4\times4 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$.

Logo, BDE: $2x + 2y - 4z - 2 = 0 \underset{\div 2}{\Leftrightarrow} x + y - 2z - 1 = 0$.

2.3 A amplitude do ângulo AEC é igual à amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{EC}$, que é dada por:

$$\cos\left(A\hat{E}C\right) = \cos\left(\overrightarrow{EA}\,\hat{}\,\overrightarrow{EC}\right) = \frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}}{\left\|\overrightarrow{EA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{EC}\right\|}$$

Tem-se $\overrightarrow{EA} = A - E$, ou seja, as coordenadas de $\overrightarrow{EA}$ são $(0-4, 1-5, 3-4) = (-4,-4,-1)$ e $\overrightarrow{EC} = C - E$, ou seja, as coordenadas de $\overrightarrow{EC}$ são $(2-4, 3-5, -1-4) = (-2,-2,-5)$.

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 | 11.º ano
© Raiz Editora, 2025. Todos os direitos reservados.

Assim, $\cos\left(A\hat{E}C\right)=\cos\left(\overrightarrow{EA}\,\hat{}\,\overrightarrow{EC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}}{\left\|\overrightarrow{EA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{EC}\right\|}=\dfrac{(-4,-4,-1)\cdot(-2,-2,-5)}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-1)^2}\times\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-5)^2}}=$

$$=\frac{8+8+5}{\sqrt{16+16+1}\times\sqrt{4+4+25}}=\frac{21}{\sqrt{33}\times\sqrt{33}}=\frac{21}{33}$$

Portanto, $A\hat{E}C=\cos^{-1}\left(\dfrac{21}{33}\right)\approx 50,48^{\text{o}}$.

3.1 Tem-se que:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2-5(n+1)}{n+1+7}-\frac{2-5n}{n+7}=\frac{2-5n-5}{n+8}-\frac{2-5n}{n+7}=\frac{(-3-5n)(n+7)-(2-5n)(n+8)}{(n+8)(n+7)}=$$

$$=\frac{-3n-21-\cancel{5n^2}-35n-2n-16+\cancel{5n^2}+40n}{(n+8)(n+7)}=\frac{\cancel{-38n}-37+\cancel{38n}}{(n+8)(n+7)}=-\frac{37}{(n+8)(n+7)}$$

Logo, como $(n+8)(n+7)>0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$, tem-se que $-\dfrac{37}{(n+8)(n+7)}<0$, ou seja, $u_{n+1}-u_n<0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$, e, portanto, a sucessão (u_n) e monótona decrescente.

3.2

- Para n ímpar, tem-se que $(-1)^n=-1$, pelo que $v_n=\dfrac{(-1)^n n+n+1}{n+2}=\dfrac{-n+n-1}{n+2}=-\dfrac{1}{n+2}$.

Para todo o n natural ímpar, $0<\dfrac{1}{n+2}\leq\dfrac{1}{3}$, pelo que, $-\dfrac{1}{3}\leq-\dfrac{1}{n+2}<0$.

- Para n par, tem-se que $(-1)^n=1$, pelo que $v_n=\dfrac{(-1)^n n+n-1}{n+2}=\dfrac{n+n-1}{n+2}=\dfrac{2n-1}{n+2}$.

Fazendo a divisão inteira de $2n-1$ por $n+2$:

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{2n} & - & 1 & n+2 \\ \cline{4-4} \cancel{-2n} & - & 4 & 2 \\ \hline & & -5 & \end{array}$$

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 | 11.º ano
© Raiz Editora, 2025. Todos os direitos reservados.

Logo, para n par, $v_n = 2 - \dfrac{5}{n+2}$.

Para todo o n natural par, $0 < \dfrac{1}{n+2} \le \dfrac{1}{4}$, pelo que:

$$0 < \frac{1}{n+2} \le \frac{1}{4} \underset{\times(-5)}{\Leftrightarrow} -\frac{5}{4} \le -\frac{5}{n+2} < 0 \underset{+2}{\Leftrightarrow} -\frac{5}{4} + 2 \le 2 - \frac{3}{n+2} < 2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le 2 - \frac{3}{n+2} < 2$$

Portanto, para todo o n natural, $-\dfrac{1}{3} \le v_n < 2$, pelo que (v_n) é limitada. O conjunto dos majorantes é $[2, +\infty[$ e o conjunto dos minorantes é $\left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right]$.

3.3 Tem-se que:

- $w_2 = 8u_1 - w_1 = 8 \times \dfrac{2 - 5\times 1}{1+7} - a = \cancel{8} \times \dfrac{-3}{\cancel{8}} - a = -3 - a$;

- $w_3 = 8u_2 - w_2 = 8 \times \dfrac{2 - 5\times 2}{2+7} - (-3 - a) = 8 \times \dfrac{-8}{9} + 3 + a = -\dfrac{64}{9} + 3 + a = -\dfrac{37}{9} + a$.

Logo, como $w_3 = -\dfrac{55}{9}$, tem-se $w_3 = -\dfrac{55}{9} \Leftrightarrow -\dfrac{37}{9} + a = -\dfrac{55}{9} \Leftrightarrow a = -\dfrac{55}{9} + \dfrac{37}{9} \Leftrightarrow a = -\dfrac{18}{9} \Leftrightarrow a = -2$

Resposta: A

4.1 Como (u_n) é uma progressão aritmética, e sendo r a sua razão, tem-se:

$$u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} = \frac{u_{12} + u_{16}}{2} \times 5 \underset{\substack{u_{12} = u_8 + 4r \\ u_{16} = u_{20} - 4r}}{=} \frac{u_8 + \cancel{4r} + u_{20} - \cancel{4r}}{2} \times 5 = \frac{u_8 + u_{20}}{2} \times 5 \underset{u_8 + u_{20} = 11}{=} \frac{11}{2} \times 5 = \frac{55}{2}$$

Resposta: C

4.2 Sendo r a razão da progressão aritmética (u_n), tem-se que:

- $u_8 = u_{12} - 4r = 5 - 4r$;

- $u_{20} = u_{12} + 8r = 5 + 8r$.

Assim, como $u_8 + u_{20} = 11$, vem que $u_8 + u_{20} = 11 \underset{\substack{u_8 = 5 - 4r \\ u_{20} = 5 + 8r}}{\Leftrightarrow} 5 - 4r + 5 + 8r = 11 \Leftrightarrow 4r = 1 \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{4}$.

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 | 11.º ano
© Raiz Editora, 2025. Todos os direitos reservados.

Portanto, o termo geral de (u_n) é dado por

$$u_n = u_{12} + (n-12) \times r = 5 + (n-12) \times \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{4}n - 3 = \frac{1}{4}n + 2$$

5. Seja r a razão da progressão geométrica (w_n). Assim, para todo o $n \in \mathbb{N}$, tem-se $w_{n+3} = w_n \times r^3$, pelo que:

$$w_{n+3} + w_n = 0 \Leftrightarrow w_n \times r^3 + w_n = 0 \Leftrightarrow w_n\left(r^3+1\right) = 0 \Leftrightarrow w_n = 0 \ \vee \ r^3 + 1 = 0$$

Como $w_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vem que $\underbrace{w_n = 0}_{\textit{Impossível}} \ \vee \ r^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^3 = -1 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow r = -1$.

Logo, a soma dos 2024 primeiros termos de (w_n) é dada por:

$$w_1 \times \frac{1-r^{2024}}{1-r} = w_1 \times \frac{1-(-1)^{2024}}{1-(-1)} \underset{(-1)^{2024}=1}{=} w_1 \times \frac{1-1}{2} = w_1 \times 0 = 0$$

Resposta: B

6.1 Seja r a razão da progressão aritmética (u_n).

Assim, $u_8 = u_2 + 6r$, pelo que $u_2 = u_8 + 12 \Leftrightarrow \cancel{u_2} = \cancel{u_2} + 6r + 12 \Leftrightarrow -6r = 12 \Leftrightarrow r = -2$.

Logo, a sucessão (u_n) é decrescente dado que é uma progressão aritmética de razão negativa.

6.2.1 A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3 se $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tem-se que $v_n = \frac{3^{u_n}}{27^{-n}} = \frac{3^{u_n}}{\left(3^3\right)^{-n}} = \frac{3^{u_n}}{3^{-3n}} = 3^{u_n+3n}$.

Dado que (u_n) é uma progressão aritmética de razão -2, então $u_{n+1} - u_n = -2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{u_{n+1}+3(n+1)}}{3^{u_n+3n}} = 3^{u_{n+1}+\cancel{3n}+3-u_n-\cancel{3n}} = 3^{u_{n+1}-u_n+3} \underset{u_{n+1}-u_n=-2,\ \forall n \in \mathbb{N}}{=} 3^{-2+3} = 3$.

Logo, a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

© Raiz Editora, 2025. Todos os direitos reservados.

6.2.2 A soma dos dez primeiros termos de (v_n) é dada por $v_1 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = v_1 \times \frac{-59048}{-2} = 29524v_1$.

Logo, $29524v_1 = 118096 \Leftrightarrow v_1 = \frac{118096}{29524} \Leftrightarrow v_1 = 4$.

Portanto, o termo geral de (v_n) é dado por $v_n = v_1 \times 3^{n-1} = 4 \times \frac{3^n}{3} = \frac{4}{3} \times 3^n$.

7.1 A soma dos n primeiros termos de (u_n) é dada por $n^2 + \frac{3n}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, ou seja:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n^2 + \frac{3n}{2}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

Logo:

- $u_1 = 1^2 + \frac{3\times 1}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ (a soma para $n=1$ corresponde ao primeiro termo);
- $u_1 + u_2 = 2^2 + \frac{3\times 2}{2} \underset{u_1=\frac{5}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{5}{2} + u_2 = 4 + 3 \Leftrightarrow u_2 = 7 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow u_2 = \frac{9}{2}$.

Assim, sendo r a razão da progressão aritmética (u_n), tem-se $r = u_2 - u_1 = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Portanto, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = \frac{5}{2} + (n-1) \times 2 = \frac{5}{2} + 2n - 2 = 2n + \frac{1}{2}$.

Outra resolução:

A soma dos n primeiros termos de (u_n) é dada por $n^2 + \frac{3n}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, ou seja:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n^2 + \frac{3n}{2}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

Logo, $n^2 + \frac{3n}{2} = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow \left(n + \frac{3}{2}\right) \times n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow \frac{2n+3}{2} \times n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$, pelo que:

$$u_1 + u_n = 2n + 3 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + r(n-1) = 2n + 3 \Leftrightarrow 2u_1 + rn - r = 2n + 3$$

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 | 11.° ano
© Raiz Editora, 2025. Todos os direitos reservados.

Sendo $2u_1 - r$ constante, tem-se:

$$\begin{cases} r = 2 \\ 2u_1 - r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ 2u_1 - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ u_1 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Portanto, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = \dfrac{5}{2} + (n-1) \times 2 = \dfrac{5}{2} + 2n - 2 = 2n + \dfrac{1}{2}$.

7.2.1 $\lim\left(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}\right) = \lim\left(\sqrt{2(n+1)+\dfrac{1}{2}} - \sqrt{2n+\dfrac{1}{2}}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\left(\sqrt{2n+2+\dfrac{1}{2}} - \sqrt{2n+\dfrac{1}{2}}\right) =$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{2n+\frac{5}{2}} - \sqrt{2n+\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{2n+\frac{5}{2}} + \sqrt{2n+\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{2n+\frac{5}{2}} + \sqrt{2n+\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{2n+\frac{5}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{2n+\frac{1}{2}}\right)^2}{\sqrt{2n+\frac{5}{2}} + \sqrt{2n+\frac{1}{2}}} = \lim \frac{\cancel{2n} + \frac{5}{2} - \cancel{2n} - \frac{1}{2}}{\sqrt{2n+\frac{5}{2}} + \sqrt{2n+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\times(+\infty)+\frac{5}{2}} + \sqrt{2\times(+\infty)+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{+\infty+\infty} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

7.2.2 $\lim \dfrac{(u_n)^2}{\underbrace{u_1+u_2+\ldots+u_n}_{n^2+\frac{3n}{2}}} = \lim \dfrac{\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2}{n^2+\frac{3n}{2}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \dfrac{4n^2+2n+\frac{1}{4}}{n^2+\frac{3n}{2}} = \lim \dfrac{4\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = 4$

7.2.3 $\lim \dfrac{(-1)^n u_n + n}{n+3} = \lim \dfrac{(-1)^n\left(2n+\frac{1}{2}\right)+n}{n+3}$

Como $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n \text{ é par} \\ -1 & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \end{cases}$, então:

- para n par, tem-se $\lim \dfrac{(-1)^n\left(2n+\frac{1}{2}\right)+n}{n+3} = \lim \dfrac{2n+\frac{1}{2}+n}{n+3} = \lim \dfrac{3n+\frac{1}{2}}{n+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \dfrac{3\cancel{n}}{\cancel{n}} = 3$;

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 | 11.º ano
© Raiz Editora, 2025. Todos os direitos reservados.

- para n ímpar, tem-se $\lim \frac{(-1)^n\left(2n+\frac{1}{2}\right)+n}{n+3} = \lim \frac{-2n-\frac{1}{2}+n}{n+3} = \lim \frac{-n-\frac{1}{2}}{n+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{-\cancel{n}}{\cancel{n}} = -1$.

Portanto, não existe $\lim \frac{(-1)^n u_n + n}{n+3}$.

FIM

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 | 11.° ano
© Raiz Editora, 2025. Todos os direitos reservados.