Itens para Avaliação sumativa – Novembro

Matemática A | 11.º Ano

Cotações e Propostas de resolução

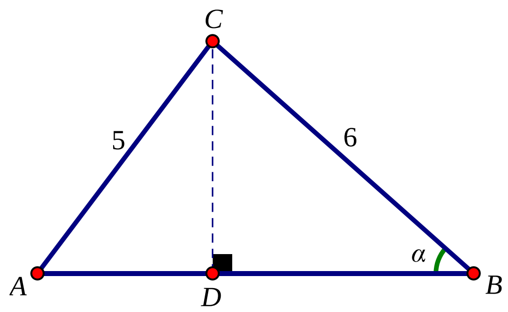
TABELA DE COTAÇÕES

Nota ao professor: Caso pretenda utilizar o conjunto de itens apresentados como uma avaliação intercalar, sugere-se a seguinte tabela de cotações:

1.	2.	3.	4.	5.	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2.1	7.2.2	8.1	8.2	8.3	9.	Total
10	10	10	10	10	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	200

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

1. Consideremos a seguinte figura, onde D é a projeção ortogonal do ponto C no lado $[AB]$.



Tem-se que $\cos\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \underset{\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\overline{BD}}{6} \Leftrightarrow \overline{BD} = 6 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \overline{BD} = 2\sqrt{5}$.

Assim, pelo teorema de Pitágoras:

- $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow 6^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow 36 = 4\times 5 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 16$
- $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \underset{\overline{CD}^2=16}{\Leftrightarrow} 5^2 = \overline{AD}^2 + 16 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 9 \underset{\overline{AD}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AD} = \sqrt{9} \Leftrightarrow \overline{AD} = 3$

Logo, $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 3 + 2\sqrt{5}$.

Resposta: C

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 10 | Matemática A | 11.º Ano
© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

2. Tem-se que $\text{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$ e $\cos(\alpha-3\pi)=\cos(\alpha-\pi-2\pi)=\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha$, pelo que:

$$\text{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos(\alpha-3\pi)<0 \Leftrightarrow -\cos\alpha-2\cos\alpha<0 \Leftrightarrow -3\cos\alpha<0 \Leftrightarrow \cos\alpha>0$$

Assim, como $\cos\alpha>0$, o ângulo de amplitude α pertence ao primeiro quadrante ou ao quarto quadrante. Mas como $\alpha\in\left]-\pi,0\right[$, conclui-se que o ângulo de amplitude α pertence ao quarto quadrante e, portanto, $\text{sen}\,\alpha<0$ e $\text{tg}\,\alpha<0$.

Logo:

- $\text{sen}\,\alpha<0 \wedge \cos\alpha>0 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha\cos\alpha<0$ (o produto entre um número positivo e um número negativo é negativo)
- $\text{tg}\,\alpha<0 \wedge \text{sen}\,\alpha<0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha+\text{sen}\,\alpha<0$ (a soma entre dois números negativos é negativa)
- $\text{tg}\,\alpha<0 \wedge \cos>0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha\cos\alpha<0$

Portanto, nenhuma das opções **A**, **B** e **D** é a correta, pelo que a resposta correta deverá ser a **C**. Verificando:

Como $\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha=\cos\alpha+(-\text{sen}\,\alpha)$ e como $\text{sen}\,\alpha<0 \Leftrightarrow -\text{sen}\,\alpha>0$, tem-se que:

$$\cos\alpha>0 \wedge -\text{sen}\,\alpha>0 \Rightarrow \cos\alpha+(-\text{sen}\,\alpha)>0 \Leftrightarrow \cos\alpha-\text{sen}\,\alpha>0$$

(a soma entre dois números positivos é positiva)

Resposta: C

3. Tem-se que:

$$(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha+2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}_{=1}+2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=\frac{1}{3}-1 \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{3}$$

Logo, $\text{tg}\,\alpha+\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{\overbrace{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}^{=1}}{\underbrace{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}_{=-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{-\frac{1}{3}}=-3$

Resposta: A

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 10 | Matemática A | 11.º Ano
© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

4. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, pelo que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Assim:

$$4\vec{v}\cdot\left(2\vec{u}-\sqrt{3}\vec{w}\right)=6 \Leftrightarrow 8\vec{v}\cdot\vec{u}-4\sqrt{3}\vec{v}\cdot\vec{w}=6 \Leftrightarrow 8\times 0-4\sqrt{3}\vec{v}\cdot\vec{w}=6 \Leftrightarrow -4\sqrt{3}\vec{v}\cdot\vec{w}=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=-\frac{6}{4\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=-\frac{6\sqrt{3}}{4\times 3} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=-\frac{6\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sendo α a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tem-se:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \|\vec{v}\|\times\|\vec{w}\|\times\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 1\times 1\times\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\alpha\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \alpha=\frac{5\pi}{6}$$

Resposta: A

5. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}\left(3,a,-\frac{1}{2}\right)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(b,-3,12)$.

A reta r é paralela ao plano α se $\vec{r}$ e $\vec{n}$ forem perpendiculares, isto é, se $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$.

Assim, $\vec{r}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \left(3,a,-\frac{1}{2}\right)\cdot(b,-3,12)=0 \Leftrightarrow 3b-3a-6=0 \Leftrightarrow 3b-3a=6 \Leftrightarrow -3(a-b)=6 \Leftrightarrow a-b=-2$

Logo, $(a-b)^3=(-2)^3=-8$.

Resposta: B

6.1 Para todo o $x\in[-\pi,\pi]$, tem-se $-1\le \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\le 1$. Assim, para $k>0$:

$$-k\le k\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\le k \underset{+k-2}{\Leftrightarrow} \underbrace{k-2-k}_{-2}\le \underbrace{k-2+k\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}_{g(x)}\le \underbrace{k+k-2}_{2k-2} \Leftrightarrow -2\le g(x)\le 2k-2$$

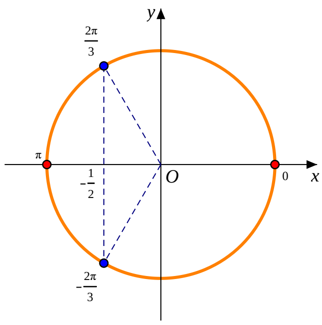
(Em cada uma das passagens, a função toma todos os valores reais entre os extremos do intervalo.)

Portanto, em função de k, o contradomínio da função g é $[-2,2k-2]$. Por outro lado, o contradomínio da função g é $[-2,4]$, pelo que $2k-2=4 \Leftrightarrow 2k=6 \Leftrightarrow k=3$.

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

6.2 Como $k=3$, a expressão analítica da função g fica $g(x)=3-2+3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=1+3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Assim, $1-g(2x)=6\operatorname{sen}x\cos x \Leftrightarrow 1-\left(1+3\operatorname{sen}\left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}\right)\right)=6\operatorname{sen}x\cos x \Leftrightarrow \cancel{1}-\cancel{1}-3\operatorname{sen}x=6\operatorname{sen}x\cos x \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow 0=6\operatorname{sen}x\cos x+3\operatorname{sen}x \Leftrightarrow 3\operatorname{sen}x(2\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow 3\operatorname{sen}x=0 \ \vee \ 2\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x=0 \ \vee \ \cos x=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=0+k\pi \ \vee \ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \, , \ k\in\mathbb{Z}$

Logo:

- se $k=0$, então $x=0 \ \vee \ x=\frac{2\pi}{3} \ \vee \ x=-\frac{2\pi}{3}$; $0\in\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{2\pi}{3}\notin\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$ e $-\frac{2\pi}{3}\in\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$
- se $k=1$, então $x=\pi \ \vee$ ____ $\vee \ x=\frac{4\pi}{3}$; $\pi\notin\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$ e $\frac{4\pi}{3}\notin\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$
- se $k=-1$, então $x=-\pi \ \vee \ x=-\frac{4\pi}{3} \ \vee \ x=-\frac{8\pi}{3}$; $-\pi\in\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$, $-\frac{4\pi}{3}\notin\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$ e $-\frac{8\pi}{3}\notin\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$

Portanto, o conjunto-solução da equação no intervalo $\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$ é $\left\{-\pi,-\frac{2\pi}{3},0\right\}$.

6.3 Tem-se que:

- $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\Rightarrow\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

Assim, como $\alpha\in]-\pi,0[$ e $\operatorname{tg}\alpha<0$, conclui-se que o ângulo de amplitude α pertence ao quatro quadrante, pelo que $\operatorname{sen}\alpha<0$ e $\cos\alpha>0$

- $g(2\alpha+\pi)+\underbrace{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)}_{-\operatorname{sen}\alpha}=1+3\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha+\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\alpha=1+3\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\alpha=$

$$=1+\underbrace{3\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}_{=\cos\alpha}-\operatorname{sen}\alpha=1+3\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$$

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

Portanto:

- como $1+\text{tg}^2\,\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, tem-se que:

$$1+\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\frac{16}{2}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 9=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{9}\underset{\cos\alpha>0}{\Leftrightarrow}\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{9}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{3}$$

- como $\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\Leftrightarrow\text{sen}\,\alpha=\text{tg}\,\alpha\times\cos\alpha$, tem-se que:

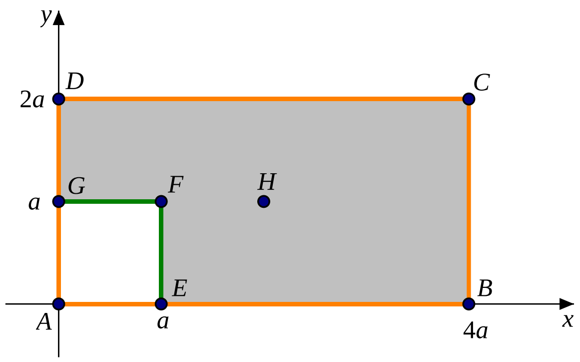
$$\text{sen}\,\alpha=-\frac{4}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{3}=-\frac{4}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Logo, $g(2\alpha+\pi)+\text{sen}(\pi+\alpha)=1+3\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha=1+3\times\frac{1}{3}-\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7.1 Vamos representar o retângulo num referencial à nossa escolha, um que seja conveniente, por exemplo, um em que A é origem do referencial, ou seja, $A(0,0)$, D e G pertencem ao eixo Oy, e E e B pertencem ao eixo Ox.

Assim, se $\overline{AE}=\overline{AG}=a$, com $a>0$, e dado que G é o ponto médio de $[AD]$, H é o centro do retângulo $[ABCD]$ e $\overline{AB}=2\overline{AD}$, então:

$$B(4a,0),\ C(4a,2a)\ \ D(0,2a),\ E(a,0),\ F(a,a),\ G(0,a)\ \text{e}\ H(2a,a)$$



Portanto, $A_{[EBCDGF]}=A_{[ABCD]}-A_{[AEFG]}=\overline{AB}\times\overline{AD}-\overline{AE}^2=4a\times2a-a^2=8a^2-a^2=7a^2$

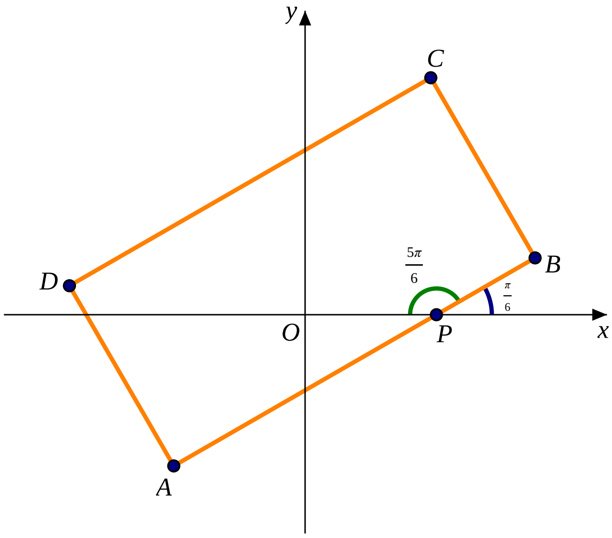
Por outro lado:

- $\overrightarrow{GC}=C-G=(4a,2a)-(0,a)=(4a,a)$
- $\overrightarrow{HB}=B-H=(4a,0)-(2a,a)=(2a,-a)$

$\therefore\ \overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{HB}=(4a,a)\cdot(2a,-a)=4a\times2a+a\times(-a)=8a^2-a^2=7a^2=A_{[EBCDGF]}$

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

7.2.1 Como a amplitude do ângulo OPB é $\frac{5\pi}{6}$, a inclinação da reta AB é $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.



Logo, o declive da reta AB é igual a $\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pelo que a equação reduzida da reta AB é da forma:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b\text{, com } b \in \mathbb{R}$$

Como o ponto $A\left(-\sqrt{3}, -2\right)$ pertence à reta AB, substituindo as suas coordenadas na equação, tem-se:

$$-2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\sqrt{3}\right) + b \Leftrightarrow -2 = -\frac{3}{3} + b \Leftrightarrow -2 = -1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Portanto, uma equação da reta AB é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \underset{\times 3}{\Leftrightarrow} 3y = \sqrt{3}x - 3 \Leftrightarrow 3y - \sqrt{3}x + 3 = 0$.

7.2.2 O ponto R pertence à reta AB, pelo que as suas coordenadas são da forma $\left(x, \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1\right)$.

Tem-se que:

- o declive da reta AB é $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pelo que $\vec{u}\left(3, \sqrt{3}\right)$ é um vetor diretor da reta AB;
- as retas RS e AB são perpendiculares se $\overrightarrow{RS}$ e $\vec{u}$ forem perpendiculares, ou seja, se $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{u} = 0$.

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 10 | Matemática A | 11.º Ano
© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

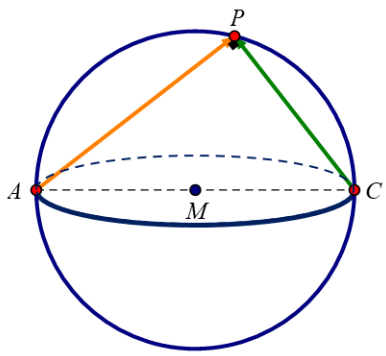
Como $\overrightarrow{RS} = S - R = \left(-\frac{7\sqrt{3}}{3}, -2\right) - \left(x, \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1\right) = \left(-\frac{7\sqrt{3}}{3} - x, -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1\right)$, tem-se:

$$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{7\sqrt{3}}{3} - x, -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1\right) \cdot \left(3, \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3 \times \left(-\frac{7\sqrt{3}}{3} - x\right) + \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7\sqrt{3} - 3x - x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -4x - 8\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -4x = 8\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$$

Logo, as coordenadas do ponto R são $\left(-2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-2\sqrt{3}\right) - 1\right)$, ou seja, $\left(-2\sqrt{3}, -3\right)$

8.1 O lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço que satisfazem a equação $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ é a superfície esférica de diâmetro $[AC]$:



Como o ponto C pertence ao eixo Oz, as suas coordenadas são da forma $(0,0,z)$. Por outro lado, o ponto C também pertence ao plano ABC, pelo que, substituindo $(0,0,z)$ na equação do plano, obtém--se $2 \times 0 + 0 + 2z = 8 \Leftrightarrow 2z = 8 \Leftrightarrow z = 4$. Logo, $C(0,0,4)$.

Como $A = C + \overrightarrow{CA} = C - \overrightarrow{AC}$, as coordenadas do ponto A, são $(0,0,4) - (-4,4,2) = (4,-4,2)$

Assim:

- $\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (4, -4, 2) = (x - 4, y + 4, z - 2)$
- $\overrightarrow{CP} = P - C = (x, y, z) - (0, 0, 4) = (x, y, z - 4)$

Logo:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \Leftrightarrow (x - 4, y + 4, z - 2) \cdot (x, y, z - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) + y(y + 4) + (z - 2)(z - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z - 2z + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 6z + 8 = 0$$

Portanto, uma equação cartesiana da superfície esférica de diâmetro $[AC]$ é:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 6z + 8 = 0$$

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

Outra resolução:

Para determinarmos uma equação cartesiana da superfície esférica de diâmetro $[AC]$, podemos começar por determinar o seu centro, que é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$. Para tal, precisamos das coordenadas do ponto C.

Assim, se ao ponto C adicionarmos metade do vetor $\overrightarrow{CA}$, obtemos o ponto M, o centro da superfície esférica.

Logo, $M = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = C - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (0,0,4) - \frac{1}{2}(-4,4,2) = (0,0,4) + (2,-2,-1) = (2,-2,3)$.

A medida do raio é $\overline{CM} = \sqrt{(0-2)^2 + (0+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$.

Portanto, uma equação cartesiana da superfície esférica de diâmetro $[AC]$ é:

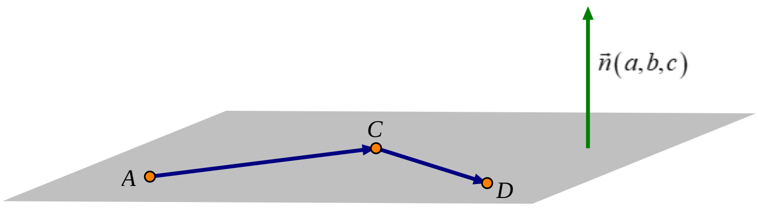
$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$$

A equação $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$ é equivalente à equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 6z + 8 = 0$. De facto:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 4z + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + \cancel{9} = \cancel{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 6z + 8 = 0$$

8.2 Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor normal ao plano ACD.



Os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CD} = D - C = (-2,0,0) - (0,0,4) = (-2,0,-4)$ são dois vetores não colineares paralelos ao plano ACD, pelo que:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b,c)\cdot(-4,4,2) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(-2,0,-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4b + 2c = 0 \\ -2a - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4b + 2c = 0 \\ -2a = 4c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\times(-2c) + 4b + 2c = 0 \\ a = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b + 10c = 0 \\ a = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b = -10c \\ a = -2c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{10c}{4} \\ a = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{5c}{2} \\ a = -2c \end{cases}$$

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

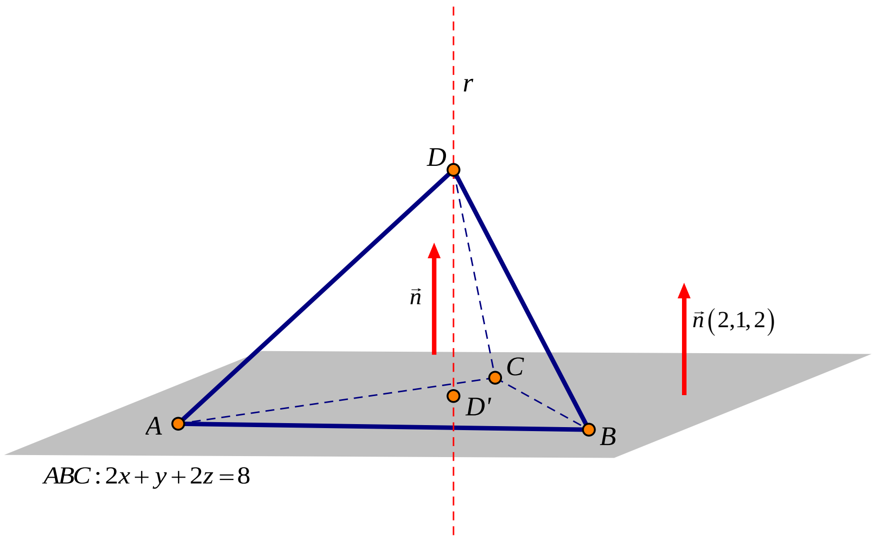
Logo, tem-se $\vec{n}\left(-2c,-\frac{5c}{2},c\right)$, com $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Fazendo $c=-2$ (por exemplo), tem-se $\vec{n}(4,5,-2)$, pelo que uma equação do plano ACD é da forma $4x+5y-2z+d=0$.

Como o ponto $C(0,0,4)$ (por exemplo) pertente ao plano ACD, substituindo as suas coordenadas na equação do plano, obtém-se:

$$4\times0+5\times0-2\times4+d=0\Leftrightarrow-8+d=0\Leftrightarrow d=8$$

$\therefore\ ACD: 4x+5y-2z+8=0$

8.3 Consideremos a seguinte figura.



O volume da pirâmide é dado por $\frac{1}{3}A_{[ABC]}\times\overline{DD'}=\frac{1}{3}\times12\times\overline{DD'}=4\overline{DD'}$, em que D' é a projeção ortogonal do vértice D no plano ABC.

Seja r a reta perpendicular ao plano ABC que contém o ponto D. Assim, a reta r interseta o plano ABC no ponto D'.

Como a reta r é perpendicular ao plano ABC, o vetor $\vec{n}(2,1,2)$, que é normal ao plano ABC, é um vetor diretor da reta r e, portanto, como $D(-2,0,0)$, uma equação vetorial de r é:

$$(x,y,z)=(-2,0,0)+k(2,1,2),\ k\in\mathbb{R}$$

Logo, um ponto genérico da reta r é $(-2+2k,k,2k)$, pelo que, substituindo na equação de ABC, tem-se: $2\times(-2+2k)+k+2\times2k=8\Leftrightarrow-4+4k+k+4k=8\Leftrightarrow9k=12\Leftrightarrow k=\frac{12}{9}\Leftrightarrow k=\frac{4}{3}$.

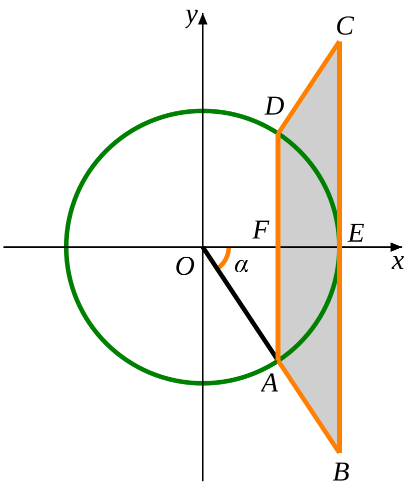
Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 10 | Matemática A | 11.º Ano
© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.

Portanto, as coordenadas de D' são $\left(-2+2\times\frac{4}{3},\frac{4}{3},2\times\frac{4}{3}\right)$, ou seja, $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$.

Então $\overline{DD'}=\sqrt{\left(-2-\frac{2}{3}\right)^2+\left(0-\frac{4}{3}\right)^2+\left(0-\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{16}{9}+\frac{64}{9}}=\sqrt{\frac{144}{9}}=\sqrt{16}=4$.

$\therefore\ V_{[ABCD]}=\frac{1}{3}A_{[ABC]}\times\overline{DD'}=4\overline{DD'}=4\times4=16$.

9. Consideremos a seguinte figura, em que F é o ponto de intersecção do lado $[AD]$ com o eixo Ox.



A área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{EF}$.

Mas como $\overline{AD}=2\overline{AF}$, $\overline{BC}=2\overline{BE}$ e $\overline{EF}=1-\overline{OF}$, tem-se que:

$$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{EF}=\frac{2\overline{AF}+2\overline{BE}}{2}\times\left(1-\overline{OF}\right)=\left(\overline{AF}+\overline{BE}\right)\left(1-\overline{OF}\right)$$

As coordenadas do ponto A são $(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha>0$ e $\operatorname{sen}\alpha<0$, e as do ponto B são $(1,\operatorname{tg}\alpha)$, com $\operatorname{tg}\alpha<0$. Assim, $\overline{AF}=-\operatorname{sen}\alpha$, $\overline{BE}=-\operatorname{tg}\alpha$ e $\overline{OF}=\cos\alpha$ e portanto:

$$A_{[ABCD]}=\left(\overline{AF}+\overline{BE}\right)\left(1-\overline{OF}\right)=(-\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)(1-\cos\alpha)=\left(-\operatorname{sen}\alpha-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)(1-\cos\alpha)=$$

$$=-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\times\cancel{\cos\alpha}=\cancel{-\operatorname{sen}\alpha}+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\cancel{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$=\operatorname{sen}\alpha\left(\cos\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}\right)=\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha}\right)=\underbrace{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}_{=\operatorname{tg}\alpha}\underbrace{\left(\cos^2\alpha-1\right)}_{=-\operatorname{sen}^2\alpha}=-\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{tg}\alpha$$

© Raiz Editora, 2024. Todos os direitos reservados.