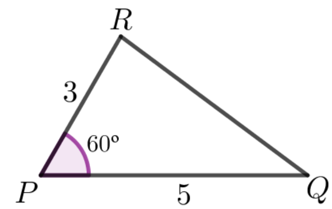
BANCO DE QUESTÕES – MATEMÁTICA A 11.º ANO

***Além das AE**

DOMÍNIO: Trigonometria e funções trigonométricas

1*. Considera o triângulo $[PQR]$ e as medidas apresentadas na figura ao lado.

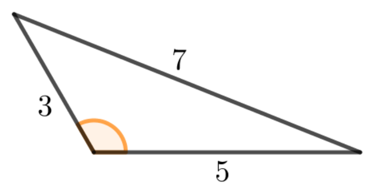


O comprimento do lado $[QR]$ é:

(A) 4 **(C)** 5

(B) $\sqrt{19}$ **(D)** $\sqrt{34}$

2*. Considera um triângulo cujos lados medem 3, 5 e 7 unidades, respetivamente.

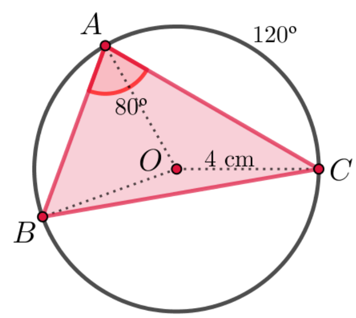


Qual é a amplitude do ângulo interno formado pelos lados de medidas 3 e 5?

(A) 100° **(C)** 120°

(B) 110° **(D)** 130°

3*. Na figura ao lado, está representado o triângulo $[ABC]$, inscrito numa circunferência de centro no ponto O e raio $4\,\text{cm}$.

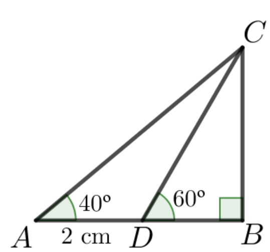


Sabe-se que $B\hat{A}C = 80^\circ$ e $AC = 120^\circ$.

Determina a área do triângulo $[ABC]$.

Apresenta o resultado em cm^2, arredondado às centésimas.

4. Na figura ao lado, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B e o ponto D pertence ao lado $[AB]$.



Sabe-se ainda que $\overline{AD} = 2\,\text{cm}$, $B\hat{A}C = 40^\circ$ e $B\hat{D}C = 60^\circ$.

Determina $\overline{BD}$, com aproximação às centésimas.

Carlos Andrade, Pedro Pimenta e Simone Azevedo

5. A figura seguinte é uma fotografia de um edifício, em que se representou o triângulo $[ABC]$, que esquematiza a estrutura triangular do telhado.

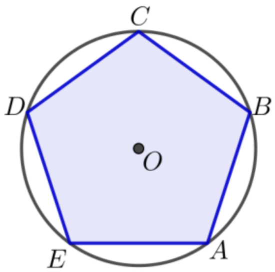
As medidas apresentadas no esquema são reais e tem-se:

- $\overline{AB} = 11{,}5\,\text{m}$;
- $\overline{AC} = 4{,}1\,\text{m}$;
- $B\hat{A}C = 27°$.

5.1 Verifica que, com arredondamento às décimas, $\overline{BC} \approx 8{,}1\,\text{m}$.

5.2 Determina $A\hat{C}B$, arredondado às unidades de grau.

6. Na figura ao lado, está representado um pentágono regular, $[ABCDE]$, inscrito numa circunferência com centro no ponto O.



Qual é o transformado do ponto E por uma rotação associada a um ângulo de amplitude $-432°$?

(A) A **(C)** C

(B) B **(D)** D

7. Para um certo número real α, tem-se, num dado referencial o.n. do plano, $\tan\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$.

A que quadrante pertence o lado extremidade do ângulo de amplitude α ?

(A) 1.º **(B)** 2.º **(C)** 3.º **(D)** 4.º

8. Sendo α a amplitude de um ângulo do 4.° quadrante e $\tan^2 \alpha = \frac{16}{9}$, então o valor de $\sin \alpha$ é:

(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{3}{5}$ **(C)** $-\frac{3}{5}$ **(D)** $-\frac{4}{5}$

9. Seja β a amplitude de um ângulo do 2.° quadrante tal que $\cos \beta = -\frac{2}{3}$.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $\cos(\beta + \pi) = -\frac{2}{3}$

(B) $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$

(C) $\cos(\beta - \pi) = -\frac{2}{3}$

(D) $\sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$

10. Seja $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. Determina o sinal da expressão $\frac{\sin \alpha \times \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

11. Considera uma circunferência de raio r e seja c o comprimento de um arco dessa circunferência.

Mostra que a amplitude desse arco é dada por $\frac{c}{r}$.

12. Seja f a função, de domínio $[-\pi, \pi]$, definida por $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - 1$.

Determina:

12.1 os zeros de f;

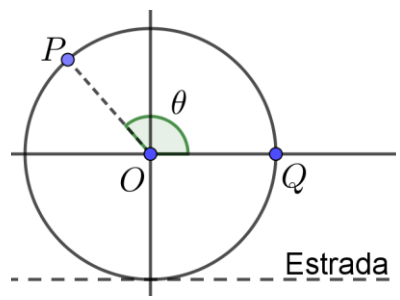
12.2 as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = -2$;

12.3 o período fundamental da função g definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x)$.

13. Uma bicicleta tem rodas com $60\ \text{cm}$ de diâmetro. Durante um passeio, numa estrada plana, um pequeno prego fixou-se numa das rodas, ficando a sua cabeça na superfície do pneu.

Na figura ao lado:

- a circunferência representa essa roda;
- o ponto O, centro da circunferência, representa o centro da roda;
- o ponto P representa a cabeça do prego;
- Q é um ponto da circunferência, tal que a reta OQ representa a reta do plano da roda que é paralela à estrada e que passa no centro da roda;
- θ é a amplitude do ângulo orientado com lados extremidade $\dot{O}Q$ e $\dot{O}P$.



Seja d a distância, em cm, da cabeça do prego à estrada, em função de θ, durante uma volta completa da roda.

13.1 Mostra que $d(\theta) = 30(1 + \sin\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

13.2 Determina a distância, em cm, da cabeça do prego à estrada, quando $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

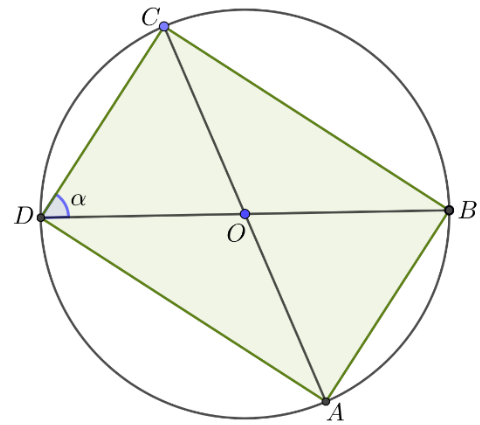
13.3 Resolve a equação $d(\theta) = 45$ e interpreta-a no contexto do problema.

13.4 Supõe que, após o prego se ter fixado na roda, a bicicleta percorreu $106{,}5$ metros até que o furo foi detetado.

Qual foi a amplitude da rotação efetuada pela cabeça do prego em torno do centro da roda?

Apresenta o resultado em radianos, e considera que a roda não derrapou e que rodou no sentido positivo.

14. Na figura ao lado, está representado um quadrilátero, $[ABCD]$, inscrito numa circunferência de raio 1. O centro da circunferência, O, é o ponto de interseção das diagonais do quadrilátero.



α é a amplitude do ângulo BDC, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

14.1 Justifica que o quadrilátero é um retângulo.

14.2 Mostra que a área, A, do retângulo, em função de α é dada por

$$A(\alpha) = 4 \times \sin\alpha \times \cos\alpha$$

14.3 Sabe-se que a área máxima do retângulo que se pode obter variando o valor de α é 2.

Determina o valor de α para o qual a área do retângulo é máxima e interpreta geometricamente o resultado.

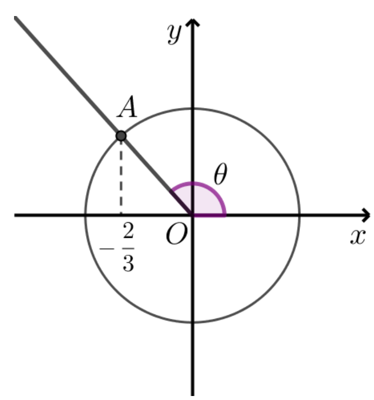
Na tua resolução, aplica a fórmula trigonométrica $2 \times \sin\alpha \times \cos\alpha = \sin(2\alpha)$.

15. Resolve, em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$, a equação:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \times \sin(\pi + x) = 1$$

16. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. do plano de origem O:

- a circunferência trigonométrica;
- o lado extermidade $\dot{O}A$ de um ângulo de amplitude θ.



Sabe-se que a abcissa do ponto A é $-\frac{2}{3}$.

Determina o valor exato da expressão:

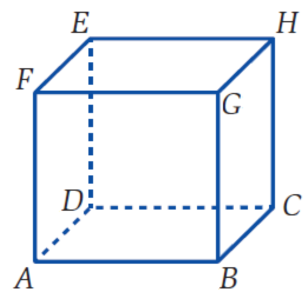
$$\cos(\pi + \theta) - \sin(\theta - \pi) + \tan(-\theta)$$

DOMÍNIO: Geometria analítica

1. Considera, num referencial o.n. do plano, a reta que passa nos pontos de coordenadas $\left(3,-\sqrt{3}\right)$ e $\left(2,1-\sqrt{3}\right)$. A inclinação dessa reta é:

(A) 30º **(B)** 45º **(C)** 135º **(D)** 150º

2. Considera o cubo $[ABCDEFGH]$, representado na figura, cuja aresta mede a unidades ($a>0$).



Qual é o valor de $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CH}$?

(A) $-\sqrt{3}a^2$ **(C)** a^2

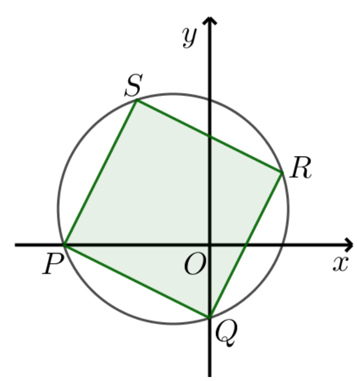
(B) $-a^2$ **(D)** $\sqrt{3}a^2$

3. Considera, num referencial o.n. do plano, a reta r definida por $y=\sqrt{3}x-1$ e a reta s definida por $(x,y)=\left(1,\sqrt{3}\right)+k\left(\sqrt{3},-1\right),\ k\in\mathbb{R}$.

Qual é a amplitude do ângulo formado pelas retas r e s ?

(A) 0º **(B)** 30º **(C)** 60º **(D)** 90º

4. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. Oxy, o quadrado $[PQRS]$, inscrito numa circunferência. As coordenadas dos vértices P, Q e R são, respetivamente, $(-4,\ 0)$, $(0,\ -2)$ e $(2,\ 2)$.



4.1 Determina a área do quadrado $[PQRS]$.

4.2 Determina as coordenadas do vértice S.

4.3 Determina o produto escalar $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{RQ}$.

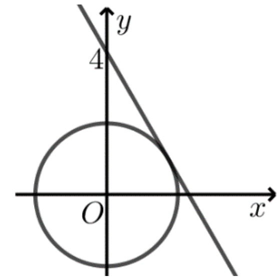
4.4 Determina a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[PQ]$.

4.5 Determina, aplicando condições vetoriais, a equação reduzida da circunferência.

4.6 Determina a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto P.

4.7 Determina um valor aproximado às décimas de grau da amplitude do ângulo formado pela reta PQ e pela reta definida pela equação $(x,y)=(2,4)+k(2,1),\ k\in\mathbb{R}$.

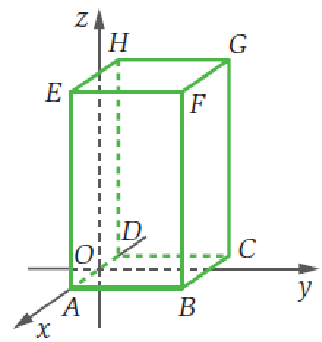
5. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial o.n. do plano, uma circunferência de centro na origem e a reta de equação $y=-\sqrt{3}x+4$, tangente à circunferencia.



5.1 Determina a inclinação da reta.

5.2 Determina o raio da circunferência.

6. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. do espaço, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases quadradas paralelas ao plano xOy. As coordenadas dos vértices A, B e G são, respetivamente, $(3,0,0)$, $(3,6,0)$ e $(-3,6,12)$.



6.1 Determina o produto escalar $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}$.

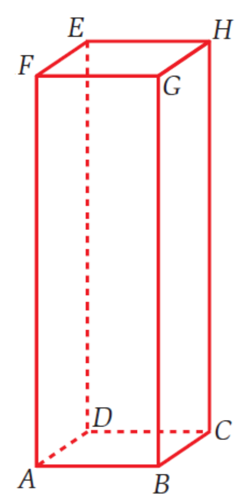
6.2 Determina uma equação vetorial da reta DF.

6.3 Identifica o conjunto de pontos P do espaço tais que $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PE}=0$ e define-o por meio de uma condição cartesiana.

6.4 Determina um valor aproximado às décimas de grau da amplitude do ângulo formado pela reta AG e pela reta definida pela equação $(x,y,z)=(3,0,0)+k(0,6,3),\ k\in\mathbb{R}$.

7. Na figura, está representado o parelelepípedo reto $[ABCDEFGH]$. Fixado um determinado um referencial o.n $Oxyz$, tem-se:

$A(0,3,2)$, $B(1,-3,-1)$, $G(4,-21,36)$ e $H(-2,-22,36)$.



7.1 Determina uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$. Apresenta-a na forma $ax+by+cz=d$.

7.2 Define, por uma equação vetorial, a reta AF.

7.3 Determina as coordenadas dos vértices C, D, E e F.

7.4 Determina uma condição que defina a esfera cuja superfície contém os vértices do paralelepípedo.

7.5 Identifica o conjunto de pontos P do espaço tais que $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ e define-o por meio de uma condição cartesiana.

8. Considera, num referencial o.n. do espaço, os plano definidos pelas seguintes equações:

$$x+y+z=1 \quad \text{e} \quad -x-y-z=1$$

A interseção dos dois planos é:

(A) o conjunto vazio. **(B)** um ponto. **(C)** uma reta. **(D)** um plano.

9. Considera, num referencial o.n. do espaço, o plano α definido por $y=\sqrt{3}x-1$ e a reta r definida por $(x,y,z)=\left(1,\sqrt{3},0\right)+k\left(\sqrt{3},-1,0\right),\ k\in\mathbb{R}$.

Qual das afirmações é verdadeira ?

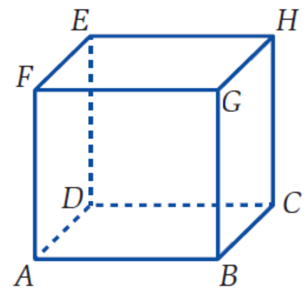
(A) A reta r é paralela ao plano α .

(B) A reta r está contida no plano α .

(C) A reta r é perpendicular ao plano α .

(D) A reta r é concorrente, mas não perpendicular ao plano α .

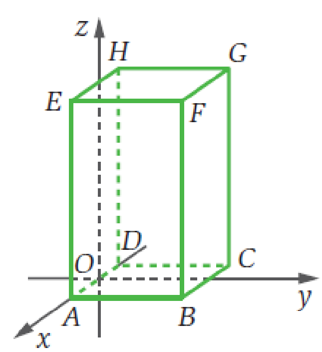
10. Considera o cubo $[ABCDEFGH]$, de aresta 1, representado na figura.



Fixa-se, na figura, um referencial ortonormado do espaço, com origem no ponto A, com unidade de comprimento igual à aresta do cubo, tal que B está contido no semieixo positivo das ordenadas, D está contido no semieixo negativo das abcissas e F está contido no semieixo positivo das cotas.

Determina, relativamente a esse referencial, a equação cartesiana do plano ADH na forma $ax+by+cz=d$.

11. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. do espaço, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases quadradas paralelas ao plano xOy. As coordenadas dos vértices A, B e G são, respetivamente, $(3,0,0)$, $(3,6,0)$ e $(-3,6,12)$.



11.1* Obtém uma equação vetorial do plano AFG.

11.2 Determina uma equação cartesiana do plano que contém o ponto F e é perpendicular à reta DF .

11.3 Seja α o plano que contém reta BC e que passa no ponto de coordenadas $(0,-6,20)$.

Determina as coordenadas do ponto de interseção do plano α com o eixo Oz .

DOMÍNIO: Sucessões

1. Considera a sucessão (a_n) de termo geral $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

1.1 Calcula a_2 .

1.2 Mostra que $\dfrac{1}{31}$ é termo da sucessão (a_n) e identifica a respetiva ordem.

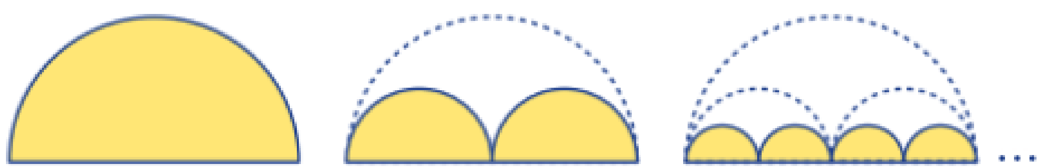
1.3 Estuda (a_n) quanto à monotonia.

1.4 Justifica que (a_n) não é uma progressão aritmética nem uma progressão geométrica.

1.5 A sucessão (a_n) é convergente? E limitada? Justifica as tuas respostas.

2. Justifica que a expressão $\dfrac{1}{n-1}$ não pode ser o termo geral de uma sucessão.

3. Na figura seguinte, estão representados os três primeiros termos de uma sucessão de construções geométricas.



Tal como a figura sugere:

- a primeira construção é um semicírculo de raio 1 ;
- cada construção, a partir da segunda, é constituída pelo dobro dos semicírculos, com metade do raio, do que a construção anterior.

3.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja u_n o número de semicírculos da construção de ordem n .

a. Justifica que a sucessão (u_n) é um sucessão monótona.

b. Apresenta o termo geral de (u_n) .

c. Determina o número de semicírculos da décima construção.

3.2 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja v_n a área sombreada da construção de ordem n .

a. Justifica que a sucessão (v_n) é definida por $v_n = \dfrac{\pi}{2^n}$.

b. Calcula $\lim(v_n)$ e interpreta o resultado no contexto da situação.

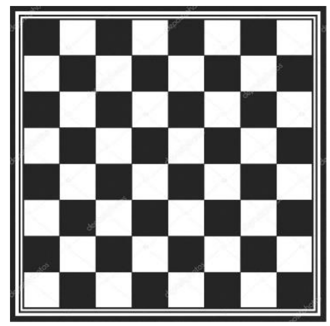
c. Justifica que a sucessão (v_n) é limitada.

3.3 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja w_n o perímetro da construção de ordem n.

a. Calcula os dois primeiros termos de (w_n).

b. Obtém o termo geral de (w_n) e conclui que (w_n) é uma sucessão constante.

4. Uma das lendas a respeito da origem do jogo de xadrez conta que o jogo foi criado por um jovem inventor para entreter um rei da Índia. O rei ficou maravilhado e quis recompensar o jovem. Perguntou-lhe que presente desejava e a resposta foi surpreendente. O jovem pediu:



- 1 grão de trigo pela 1.ª casa do tabuleiro;
- 2 grãos de trigo pela 2.ª casa;
- 4 grãos de trigo pela 3.ª casa;
- 8 grãos de trigo pela 4.ª casa;
- e assim sucessivamente.

4.1 Justifica que os termos consecutivos da sequência de grãos de trigo, do menor para o maior, estão em progressão geométrica, e identifica a respetiva razão.

4.2 Parece que não foi possível ao rei cumprir a promessa, dado que, para tal, não chegava sequer toda a produção mundial de trigo da altura.

Calcula o número de grãos de trigo que o rei teria de oferecer ao jovem para cumprir a recompensa.

Apresenta o resultado em notação científica, na forma $a \times 10^b$, com a arredondado às centésimas e b inteiro.

5. Considera a sucessão (u_n) definida por recorrência como se segue:

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n, \quad \text{para} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

5.1 Determina o terceiro termo da sucessão (u_n).

5.2 Apresenta o termo geral da sucessão (u_n).

5.3 (u_n) é uma sucessão limitada? Justifica a tua resposta.

6. Considera a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = -2n - 3$.

6.1 Define (v_n) por recorrência.

6.2 Justifica que (v_n) é uma progressão aritmética e identifica a respetiva razão.

7*. Prova, por indução matemática, que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ é múltiplo de 3.

8. Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = \dfrac{2n}{3n+1}$. Mostra, por definição, que $w_n \to \dfrac{2}{3}$.

DOMÍNIO: Funções reais de variável real

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x)=1-x^2$.

Qual das seguintes expressões define uma sucessão (u_n) tal que $\lim f(u_n)=-3$?

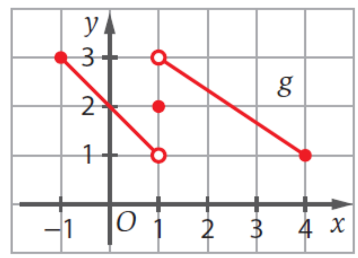
(A) $u_n=\frac{-3}{n}$

(B) $u_n=-\frac{2}{n}$

(C) $u_n=\frac{-3n}{n+1}$

(D) $u_n=\frac{-2n}{n+1}$

2. Na figura, está representado o gráfico de uma função g de domínio $[-1,4]$.



2.1 Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n=1-\frac{n}{1-n^2}$.

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\lim g(u_n)=3$

(B) $\lim g(u_n)=2$

(C) $\lim g(u_n)=1$

(D) Não existe $\lim g(u_n)$

2.2 Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$

(B) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$

(C) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=1$

(D) Não existe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

2.3 Qual das seguintes proposições é verdadeira?

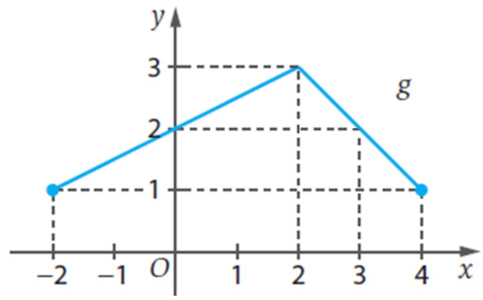
(A) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=1$

(B) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=2$

(C) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=2$

(D) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=1$

3. Seja f a função real de variável real definida por $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ e seja g a função cujo gráfico se representa na figura ao lado.



3.1* Qual é o domínio da função $f \circ g$?

(A) $[-2,2]$

(B) $[-2,4]$

(C) $[-2,0]\cup[3,4]$

(D) $[0,3]$

3.2* Qual é o contradomínio da função $g \circ f$?

(A) $[0,2]$ **(B)** $[0,3]$ **(C)** $[1,3]$ **(D)** $[2,3]$

3.3 Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2}(f\times g)(x)$?

(A) $-3\sqrt{2}$ **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** $3\sqrt{2}$

3.4* Qual dos seguintes limites existe?

(A) $\lim\limits_{x\to 1}(f\circ g)(x)$

(B) $\lim\limits_{x\to 2}(f\circ g)(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to -2}(g\circ f)(x)$

(D) $\lim\limits_{x\to 4}(g\circ f)(x)$

4. Sejam f a função polinomial definida por $f(x)=x^2-x-2$ e g a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, definida por $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

4.1 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 1^-}(f\times g)(x)=-\infty$

(B) $\lim\limits_{x\to 1^+}(f\times g)(x)=+\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=+\infty$

(D) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=-\infty$

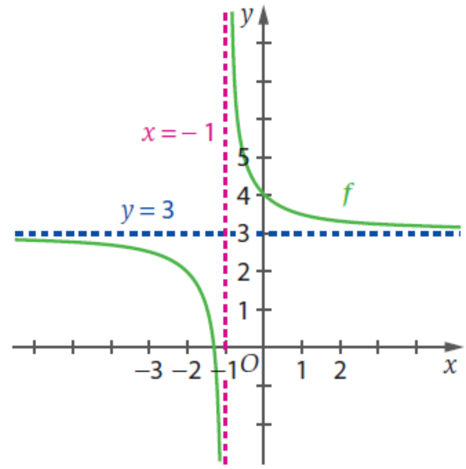
4.2 Quantas assíntotas verticais tem o gráfico da função $\dfrac{f}{g}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

4.3 Quantas assíntotas verticais tem o gráfico da função $\dfrac{g}{f}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

5. Na figura, está representada graficamente, em referencial o.n., a função racional f definida por uma expressão do tipo $y=a+\dfrac{b}{x-c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.



5.1 Quais são os valores de a e c?

(A) $a=3$ e $c=-1$ **(C)** $a=3$ e $c=1$

(B) $a=1$ e $c=3$ **(D)** $a=-1$ e $c=3$

5.2 Qual é o valor de b, sabendo-se que $f(0)=4$?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4

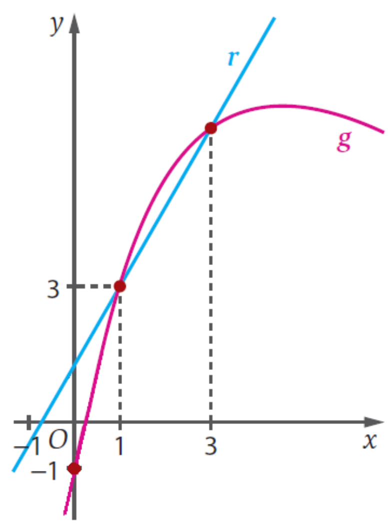
5.3 Seja g a função, real de variável real, definida por $g(x)=f(x-2)$.

Quais das seguintes equações definem as assíntotas ao gráfico da gunção g?

(A) $y=3$ e $x=-3$ **(C)** $y=1$ e $x=-1$

(B) $y=3$ e $x=1$ **(D)** $y=1$ e $x=-1$

6. No referencial o.n. da figura, estão representados parte do gráfico da função g e a reta r, secante ao gráfico de g nos pontos de abcissas 1 e 3.



Sabe-se que:

- a inclinação da reta r é 60°;
- $g(0)=-1$ e $g(1)=3$.

6.1 O valor de $\text{tmv}_{g,[0,1]}$ é:

(A) -4 **(C)** $\dfrac{1}{4}$

(B) $-\dfrac{1}{4}$ **(D)** 4

6.2 O valor de $g(3)$ é:

(A) $3+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $3+2\sqrt{3}$ **(C)** $3+\sqrt{2}$ **(D)** $3+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

7*. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, para cada valor de $k \geq -1$, por:

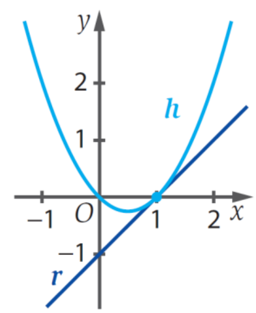
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x^2+3x+2} & \text{se } x > -1 \\ \sqrt{k-x} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k para o qual f é contínua em $x = -1$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 8

8. No referencial o.n. da figura, estão representados parte do gráfico da função h e a reta r, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1.

A reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 1 e o eixo Oy no ponto de ordenada –1.



8.1 O valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$ é:

(A) –1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

8.2 Sabe-se que h é uma função quadrática com zeros 0 e 1.

8.2.1* Qual é a solução da equação $h'(x) = 0$?

(A) 0 **(B)** $\dfrac{1}{4}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** 1

8.2.2 Qual das seguintes é uma expressão analítica de h?

(A) $\dfrac{1}{2}x(x+1)$ **(B)** $x(x+1)$ **(C)** $\dfrac{1}{2}x(x-1)$ **(D)** $x(x-1)$

9*. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cujo gráfico tem uma assíntota de equação $y = -1$.

Qual das seguintes expressões pode definir a função derivada de g?

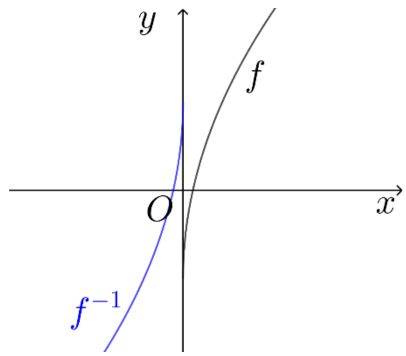
(A) $g'(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$ **(C)** $g'(x) = 1-x$

(B) $g'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ **(D)** $g'(x) = (1+x)^2$

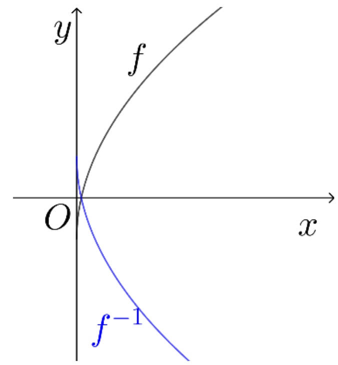
10. Considera a função $f:[0,+\infty[\ \rightarrow [-1,+\infty[$, definida por $f(x)=3\sqrt{x}-1$.

10.1* Em qual das opções estão representadas partes dos gráficos de f e f^{-1}?

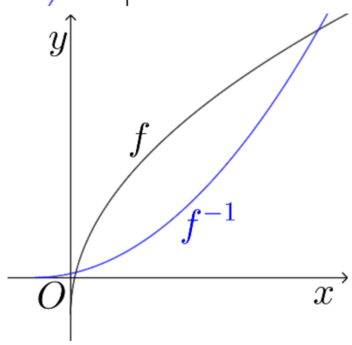
(A)



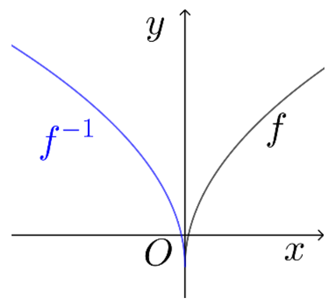
(B)



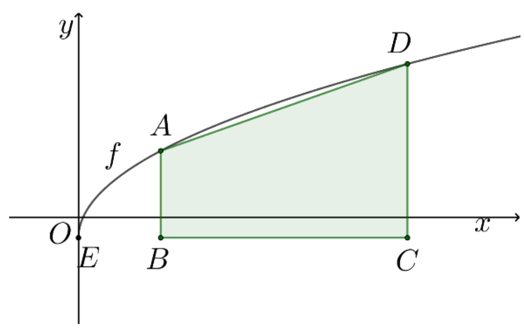
(C)



(D)



10.2 Na figura, estão representados parte do gráfico da função f e o trapézio retângulo $[ABCD]$.



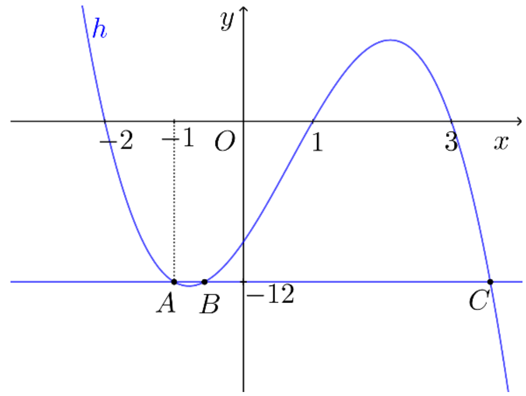
Sabe-se que:

- o ponto E é o ponto do gráfico de f que pertence ao eixo das ordenadas;
- os pontos E, B e C pertencem à mesma reta horizontal;
- os pontos A e D pertencem ao gráfico de f e têm abcissas 2 e 8, respetivamente.

Determina a área do trapézio $[ABCD]$.

Apresenta o valor pedido na forma $a\sqrt{b}$, com $a \neq 0$.

11. Na figura, estão representadas parte do gráfico da função polinomial do 3.º grau, h, e a reta de equação $y=-12$.



Sabe-se que:

- -2, 1 e 3 são os zeros de h;
- os pontos A, B e C pertencem ao gráfico de h e à reta de equação $y=-12$;
- o ponto A tem coordenadas $(-1, -12)$.

11.1 O domínio de validade da expressão $\sqrt{h(x+2)}$ é:

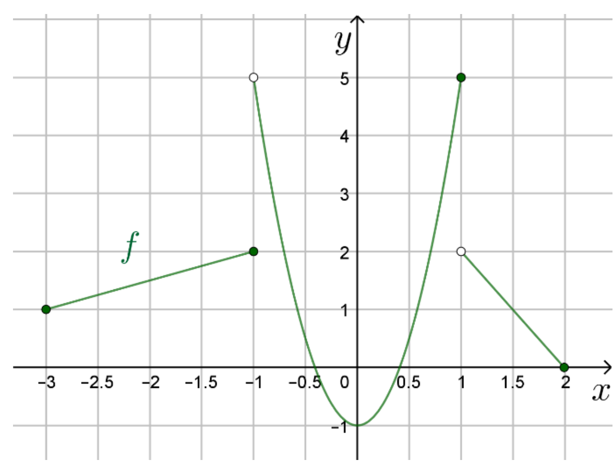
(A) $]-\infty,-2]\cup[1,3]$ **(C)** $]-\infty,-4]\cup[-1,1]$

(B) $]-\infty,0]\cup[3,5]$ **(D)** $[-2,1]\cup[3,+\infty[$

11.2 Mostra que $h(x)=-\frac{3}{2}x^3+3x^2+\frac{15}{2}x-9$.

11.3 Determina os valores exatos das abcissas dos pontos B e C .

12.* Considera as funções $g:\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\rightarrow\left]-\infty,2\right]$, definida por $g(x)=2-\sqrt{2x-1}$, e f, de domínio $[-3,2]$, cujo gráfico se apresenta ao lado.



12.1 Qual é o valor de $(g\circ f)(1)$?

(A) -1 **(C)** $2-\sqrt{3}$

(B) 2 **(D)** 5

12.2 Determina o domínio da função $\left(\frac{g}{f}\right)$.

Apresenta a tua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

12.3 Determina as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção do gráfico de g com o gráfico de g^{-1}.

13. Uma certa quantidade de um ácido, a, em litros, foi adicionada a 2 litros de água.

13.1 Mostra que a percentagem, p, de ácido presente na solução é dada, pela expressão

$$p(a)=\frac{100a}{2+a} \quad (a>0).$$

13.2 Determina a percentagem de ácido na solução, se forem adicionados 5 dL do mesmo aos 2 litros de água.

13.3 Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a quantidade de ácido adicionado aos 2 litros de água para que a percentagem deste na solução seja 67%.

Na tua resposta:

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o resultado em decilitros, arredondado às unidades.

14. Um certo tanque pode ser enchido por duas torneiras de caudal constante. Utilizando apenas uma das torneiras, o tanque fica cheio ao fim de 10 horas. Utilizando apenas a outra torneira, o tanque fica cheio ao fim de t horas.

Considera agora que as duas torneiras são utilizadas em simultâneo.

14.1 Mostra que o número de horas, h, necessárias para que o tanque fique cheio é dado, em função de t, por:

$$h(t)=\frac{10t}{10+t} \quad (t>0)$$

14.2 Determina o número de horas necessárias para que o tanque fique cheio, considerando $t=10$. Interpreta o resultado obtido.

14.3 Determina $\lim\limits_{t\to 0} h(t)$ e $\lim\limits_{t\to +\infty} h(t)$. Interpreta os resultados obtidos.

14.4 Determina t de modo que o tempo necessário ao enchimento do tanque, com as duas torneiras, seja 2 horas.

15. Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

15.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$

15.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

15.3 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}$

15.4 $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

15.5 $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{\sqrt{x^4-8x^2+16}}{|x+2|}$

15.6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

16*. Determina o conjunto de pontos de continuidade de cada uma das seguintes funções reais de variável real.

16.1 $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{3-x^2}}$

16.2 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x<-1 \vee x>1\\ 3x+3 & \text{se } -1\le x\le 1\end{cases}$

17*. Estuda as seguinte funções quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico. Caso existam, escreve as respetivas equações.

17.1 $f(x)=\dfrac{2x^3-10x}{x^2+3}$

17.2 $g(x)=\dfrac{3x^2-1}{2-x}$

18*. Seja f uma função diferenciável no intervalo $[-1, 1]$ tal que:

- $f(1)=3$
- $\forall x\in\,]-1,1[\,,\ -2<f'(x)<4$

Determina os possíveis valores de $f(-1)$.

Sugestão: Utiliza o teorema de Lagrange, aplicado à função f, no intervalo $[-1, 1]$.

19*. Seja g a função, real de variável real, definida por $g(x) = -x^4 + 18x^2 + 19$.

Determina os intervalos de monotonia da função g e identifica os respetivos extremos relativos e absolutos, caso existam.

20*. Seja g a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{2x^3 - 10x}{x^2 + 3}$.

Determina os intervalos de monotonia da função f e identifica os respetivos extremos relativos e absolutos, caso existam.

21*. Sejam f e g funções, de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

- f é par;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x \right) = 1$;
- $g(x) = 2\,f(x)$.

Verifica que o gráfico de g tem uma assíntota oblíqua em $-\infty$ e indica a respetiva equação reduzida.

22*. Um pintor pretende utilizar uma tela retangular para fazer uma pintura, de forma também retangular, com $2400\ \text{cm}^2$ de área, com margens brancas em toda à volta. A largura das margens superior e inferior deverá ser $3\ \text{cm}$ e a das margens laterais deverá ser $2\ \text{cm}$.

Determina a área mínima da tela a utilizar pelo pintor.

Apresenta o valor pedido em cm^2.

DOMÍNIO: Estatística

1. Registaram-se as idades, a 2 de setembro de 2018 , dos alunos de um escola secundária.

Verificou-se que a idade média era 16,41 anos e o desvio padrão era, aproximadamente, 1,37 anos.

1.1 No dia 2 de setembro de 2020, a média e o valor aproximado do desvio padrão das idades deste grupo de alunos será, respetivamente:

(A) $16,41$ e $1,37$ **(C)** $16,41$ e $3,37$

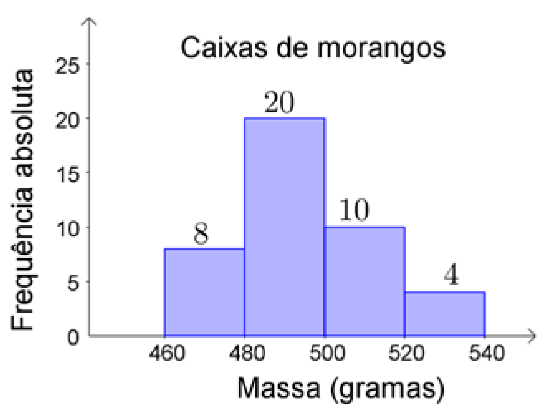
(B) $18,41$ e $3,37$ **(D)** $18,41$ e $1,37$

1.2 A tabela seguinte é referente à idade dos alunos no dia 2 de setembro de 2018.

Idade (anos)	14	15	16	17	18	19	20
Frequência relativa (%)	7%	*a*	28%	24%	14%	*b*	2%

Determina *a* e *b*.

2. Para fazer o controlo de qualidade de uma empresa que comercializa morangos, selecionou-se uma amostra de caixas de morangos e registou-se a massa, em gramas, das mesmas.



2.1 O percentil 30 localiza-se na classe:

(A) $[460,480[$ **(B)** $[480,500[$ **(C)** $[500,520[$ **(D)** $[520,540[$

2.2 Determina o valor aproximado da mediana.

3. Considera a amostra $\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{300}\right)$. O 3.º quartil desta amostra é:

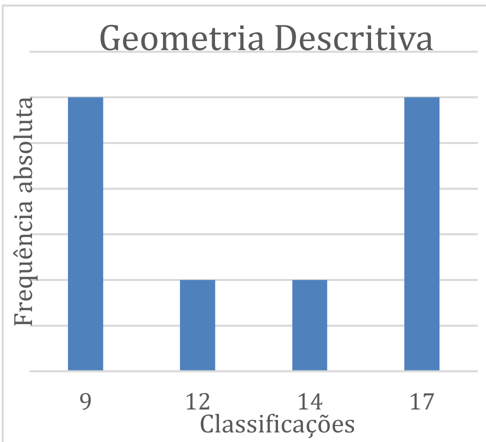
(A) $\dfrac{x_{75}+x_{76}}{2}$

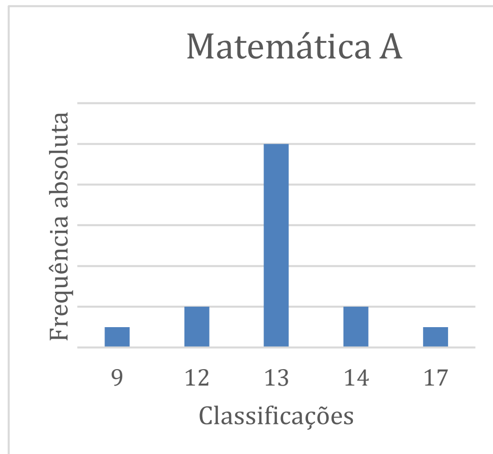
(B) x_{225}

(C) x_{226}

(D) $\dfrac{x_{225}+x_{226}}{2}$

4. Os gráficos de barras seguintes são relativos às classificações obtidas por um grupo de alunos, no final do 2.º período.





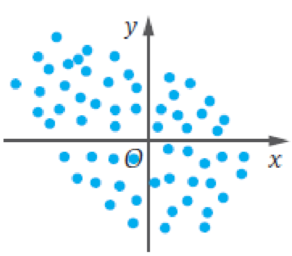
Em ambas as disciplinas, a média das classificações foi igual a 13 valores.

Em qual das disciplinas foi maior o desvio padrão das classificações?

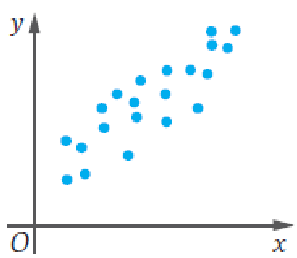
Justifica a tua resposta.

5. Nos referenciais seguintes, estão representadas três nuvens de pontos.

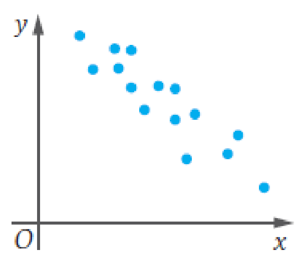
(I)



(II)



(III)



Faz corresponder a cada nuvem de pontos um dos seguintes coeficientes de correlação linear:

$r_1 = 0,86$ $\qquad$ $r_2 = -0,39$ $\qquad$ $r_3 = -0,89$

6. Na tabela seguinte, apresentam-se os dados relativos ao número de horas de estudo de sete alunos para um teste de Matemática e à classificação obtida por cada um.

Tempo de estudo (horas)	3	1	5	10	6	8	9
Classificação (valores)	7	4	7	14	10	12	16

6.1 Representa, num referencial ortonormado do plano, a nuvem de pontos desta amostra.

6.2 Recorrendo a uma calculadora, obtém o coeficiente de correlação linear desta amostra. Apresenta esse valor arredondado às centésimas.

Classifica a associação linear entre as variáveis estatísticas.

6.3 Recorrendo a uma calculadora, determina a equação reduzida da reta de mínimos quadrados relativa a esta amostra.

Utiliza essa equação para obteres uma estimativa da classificação obtida por um aluno que tenha estudado 7 horas. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

7. Numa experiência para determinar a densidade de uma substância, em g/cm^3, fizeram-se medições da massa, em gramas, e do volume, em cm^3, de amostras dessa substância. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados dessas medições.

Massa (g)	11	19	26	45	57
Volume (cm^3)	51	107	153	224	295

Obtém uma estimativa para o volume, em cm^3, arredondado às unidades, de uma amostra desta substância com 35 gramas de massa.

Na tua resolução, começa por determinar, recorrendo a uma calculadora, a equação reduzida da reta de mínimos quadrados relativa a este conjunto de dados. Considera coeficientes da equação arredondados com, pelo menos, três casas decimais.

SOLUÇÕES

Trigonometria e funções trigonométricas

1. (B)

2. (C)

3. $17,54\,\text{cm}^2$

4. $1,88\,\text{cm}$

5.2 140º

6. (D)

7. (B)

8. (D)

9. (B)

10. Negativo.

12.1 $-\frac{2\pi}{3}$ e 0.

12.2 $\left(\frac{\pi}{3},-2\right)$ e $(\pi,-2)$.

12.3 2π

13.2 $15\,\text{cm}$

13.3 $\theta=\frac{\pi}{6} \vee \theta=\frac{5\pi}{6}$; a cabeça do prego está a 45 centímetros da estrada para $\theta=\frac{\pi}{6}$ e $\theta=\frac{5\pi}{6}$.

13.4 355 rad

14.1 Qualquer um dos seus ângulos internos está inscrito numa semicircunferência, logo o quadrilátero tem os ângulos internos retos e, portanto, é um retângulo.

14.3 $\alpha=\frac{\pi}{4}$; o quadrilátero para o qual se obtém a área máxima é um quadrado.

15. $S=\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$

16. $\frac{5\sqrt{5}}{6}+\frac{2}{3}$

Geometria analítica

1. (C)

2. (C)

3. (D)

4.1 20

4.2 $(-2,4)$

4.3 -20

4.4 $y=2x+3$

4.5 $(x+1)^2+(y-1)^2=10$

4.6 $y=-3x-12$

4.7 $53{,}1^{\circ}$

5.1 120°

5.2 2

6.1 108

6.2 Por exemplo,
$(x,y,z)=(-3,0,0)+k(0,0,12)$, $k\in\mathbb{R}$.

6.3 Superfície esférica de diâmetro $[AE]$; $(x-3)^2+y^2+(z-6)^2=36$.

6.4 $43{,}1^{\circ}$

7.1 $x-6y-3z=-1$

7.2 Por exemplo:
$(x,y,z)=(0,3,2)+k(3,-18,37)$
$(k\in\mathbb{R})$

7.3 $C(-5,-4,-1)$, $D(-6,2,2)$, $E(-3,-16,39)$ e $F(3,-15,39)$.

7.4 $(x+1)^2+\left(y+\frac{19}{2}\right)^2+(z-19)^2=\frac{1785}{4}$

7.5 Plano tangente à superfície esférica de centro no ponto G e raio $\overline{BG}$, no ponto B; $3x-18y+37z=20$.

8. (D)

9. (C)

10. $-y+z=0$

11.1 Por exemplo:
$P=A+s\overrightarrow{AF}+t\overrightarrow{GF}\ (s,t\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(x,y,z)=(3,0,0)+s(0,6,12)+$

11.2 $6(x-3)+6(y-6)+12(y-12)=0$
(ou equivalente)

11.3 $(0,0,10)$

Sucessões

1.1 $a_2 = \frac{1}{5}$

1.2 $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{31} \Leftrightarrow n = 15$.

Trata-se do 15.º termo.

1.3 $a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$;

portanto, para qualquer número natural n, $a_{n+1} < a_n$, pelo que a sucessão é monótona decrescente.

1.4 $a_{n+1} - a_n$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ não são constantes. (Em alternativa, pode verificar-se que não existe razão aditiva nem multiplicativa entre três termos consecutivos.)

1.5 $\lim(a_n) = 0$. A sucessão é convergente e, portanto, limitada.

2. $\frac{1}{n-1}$ não está definido para $n = 1$, pelo que não pode definir uma função de domínio $\mathbb{N}$.

3.1

a. O número de semicírculos é crescente.

b. $u_n = 2^{n-1}$

c. 512

3.2

a. $v_n = \frac{\pi \times \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}{2} \times 2^{n-1} = \frac{\pi}{2^n}$

b. $\lim(v_n) = 0$. A área sombreada da construção tende para zero quando o número de círculos tende para $+\infty$.

c. Por exemplo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n \leq \frac{\pi}{2}$. (Em alternativa, pode referir-se que a sucessão é convergente.)

3.3

a. $w_1 = w_2 = 2 + \pi$

b. $w_n = 2 + \pi$, pelo que a sucessão é constante.

4.1 O quociente entre quaisquer dois termos consecutivos é constante (2).

4.2 $2^{64} - 1 \approx 1{,}85 \times 10^{19}$

5.1 $u_3 = 45$

5.2 $u_n = 5 \times 3^{n-1}$

5.3 $u_n \to +\infty$; logo, a sucessão não é limitada.

6.1

$$\begin{cases} v_1 = -5 \\ v_{n+1} = v_n - 2, \quad \text{para} \ \ n \geq 2 \end{cases}$$

6.2 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -2$; $r = -2$.

Funções reais de variável real

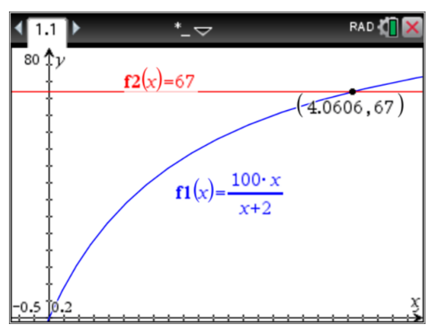
1. (D)
2.1 (A)
2.2 (D)
2.3 (A)
3.1 (C)
3.2 (D)
3.3 (B)
3.4 (C)
4.1 (C)
4.2 (A)
4.3 (D)
5.1 (A)
5.2 (B)
5.3 (B)
6.1 (D)
6.2 (B)
7. (C)
8.1 (C)
8.2.1 (C)
8.2.2 (D)
9. (B)

10.1 (C)
10.2 $27\sqrt{2}$
11.1 (C)
11.3 $x_B = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$; $x_C = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$
12.1 (A)
12.2 $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right[$
12.3 $(1,1)$

13.1 A quantidade de ácido presente na solução é a litros; a solução tem $2+a$ litros; assim, a percentagem de ácido é dada por $\dfrac{a}{2+a}\times 100$, ou seja, $p(a)=\dfrac{100a}{2+a}$.

13.2 20%

13.3 A quantidade de ácido adicionado aos 2 litros de água para que a percentagem deste na solução seja 67% é a solução da equação $\dfrac{100a}{2+a}=67$.



A quantidade de ácido adicionado é aproximadamente $41\ \text{dL}$.

14.1 Sendo V o volume do tanque, as torneiras têm caudais $\dfrac{V}{10}$ e $\dfrac{V}{t}$; em simultâneo, demoram $V/\left(\dfrac{V}{10}+\dfrac{V}{t}\right)$ horas a encher o tanque; assim, tem-se $h(t)=\dfrac{10t}{10+t}$.

14.2 5 horas; para $t=10$, as duas torneiras têm o mesmo caudal, logo, em simultâneo, demoram metade do tempo que cada uma demoraria isoladamente.

14.3 $\lim\limits_{t\to 0} h(t)=0$ – corresponde à situação em que o caudal da 2.ª torneira tenderia para infinito, o que conduziria a um tempo de enchimento a tender para zero, quer se usasse apenas esta torneira $(t\to 0)$ ou as duas em simultânio $(h(t)\to 0)$;

$\lim\limits_{t\to +\infty} h(t)=10$ – corresponde à situação em que apenas a 1.ª torneira está a encher o tanque, já que a 2.ª torneira demoraria um tempo tendencialmente infinito, ou seja, estaria fechada.

14.4 $t=2,5$ horas

15.1 $\frac{\infty}{\infty}$; 0

15.2 $\frac{\infty}{\infty}$; -1

15.3 $\frac{0}{0}$; 1

15.4 $-\infty$

15.5 $\frac{0}{0}$; 4

15.6 $\infty-\infty$; $-\infty$

16.1 f é contínua em $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$ (no seu domínio).

16.2 g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

17.1 O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua de equação $y=2x$ (em $-\infty$ e $+\infty$).

17.2 O gráfico de g tem uma assíntota vertical (bilateral) de equação $x=2$ e uma assíntota oblíqua de equação $y=-3x-6$ (em $-\infty$ e $+\infty$).

18. $-5<f(-1)<7$

19. g é crescente em $\left]-\infty,-3\right]$ e em $[0,3]$; g é decrescente em $[-3,0]$ e em $\left[3,+\infty\right[$; $g(-3)=g(3)=100$ é o máximo absoluto (também relativo) de g e $g(0)=19$ é um mínimo relativo de g.

20. f é crescente em $\left]-\infty,-1\right]$ e em $\left[1,+\infty\right[$; g é decrescente em $[-1,1]$; $f(-1)=2$ é um máximo relativo de f e $f(1)=-2$ é um mínimo relativo de f.

21. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{g(x)}{x}=4$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(g(x)-4x\right)=2$. Equação da assíntota: $y=4x+2$.

22. $2904\ \text{cm}^2$

Estatística

1.1 (D)

1.2 $a = 20\%$; $b = 5\%$.

2.1 (B)

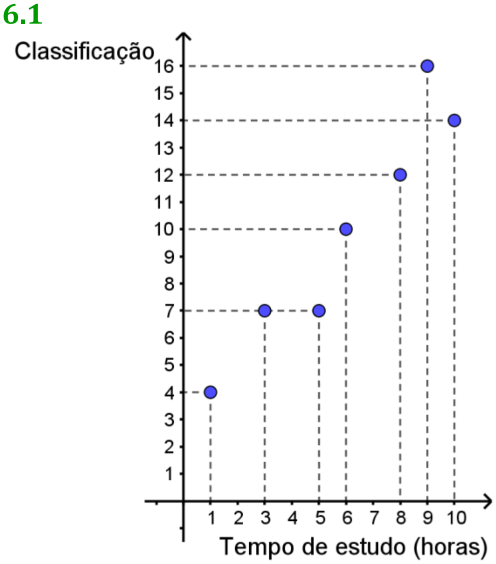
2.2 493 gramas.

3. (D)

4. Na disciplina de Geometria Descritiva. O desvio padrão mede a variabilidade dos dados em relação à média, e nesta disciplina existe uma maior dispersão das classificações em relação à média. De facto, os desvios à média são, em média, maiores (em valor absoluto) na disciplina de Geometria Descritiva.

5. (II) - $r_1 = 0,86$; (I) - $r_2 = -0,39$; (III) - $r_3 = -0,89$

6.1



6.2 $r \approx 0,95$. A associação linear é positiva e forte.

6.3 Sendo y a classificação, em valores, e x o tempo de estudo, em horas, a equação reduzida da reta de mínimos quadrados é: $y = 1,25x + 2,5$.

A estimativa pedida é 11 valores.

7. Equação reduzida da reta de mínimos quadrados: $y = 5,030x + 7,056$

Estimativa pedida: 183 cm^3