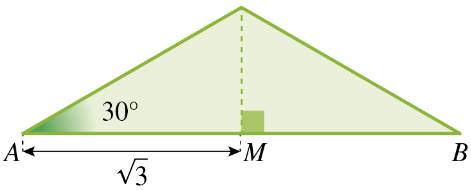
1. Seja M o ponto médio de $[AB]$.



$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

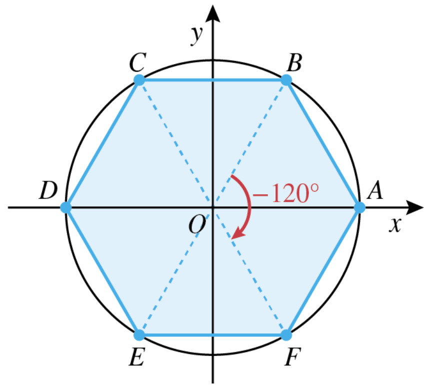
$$\tan 30° = \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{CM}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} = \overline{CM} \Leftrightarrow \overline{CM} = 1$$

$A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{MC}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \times 1}{2} = \sqrt{3}$, ou seja, $\sqrt{3}$ cm².

2.

$$1920° = 5 \times 360° + 120°$$
$$-1920° = -5 \times 360° - 120°$$

$$\begin{array}{r|l} 1920 & 360 \\ \hline -1800 & 5 \\ \hline 120 & \end{array}$$



O ângulo de amplitude $-1920°$ corresponde ao ângulo generalizado $(-5, -120°)$.

Assim, a imagem do ponto B pela rotação de centro O e amplitude $-120°$ é o ponto F.

Opção (D)

3. $A(1,0)$

$B(\cos 60°, \sin 60°)$, ou seja, $B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

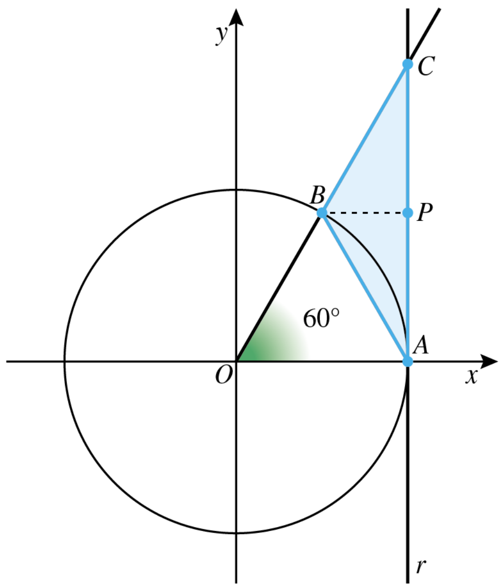
$C(1, \tan 60°)$, ou seja, $C\left(1, \sqrt{3}\right)$.

$$\overline{AC} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

Seja P a projeção ortogonal de B sobre a reta r .

$$\overline{BP} = 1 - \cos 60° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BP}}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Opção (C)

4. Um radiano é a amplitude do ângulo ao centro que determina na circunferência um arco de comprimento igual ao raio.

Assim, $r=\frac{7}{4,2}=\frac{5}{3}$, ou seja, $\frac{5}{3}\text{cm}$.

Opção (B)

5. A **afirmação I** é falsa uma vez que $-1\leq\cos\alpha\leq 1, \forall\alpha\in \text{IR}$ pelo que, $\cos\alpha$ não poderá tomar o valor 2.

A **afirmação II** é falsa uma vez que se α e β são dois ângulos de amplitudes pertencentes ao intervalo $\left]\frac{21\pi}{2}, 11\pi\right[$, como $\frac{21\pi}{2}=5\times\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$ e $11\pi=5\times 2\pi+\pi$, conclui-se que α e β são dois ângulos com lado extremidade no 2.º quadrante. Neste quadrante, o cosseno é decrescente. Logo, se $\alpha<\beta$, então $\cos\alpha>\cos\beta$.

A **afirmação III** é falsa pois $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$, pelo que:

$\sin^2\alpha+(-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (fórmula fundamental da trigonometria)

6. $P(k,-\sqrt{3}k)$, $k\in IR^+$ de onde se pode concluir que $\cos\alpha=k$ e $\sin\alpha=-\sqrt{3}k$.

Assim, $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\sqrt{3}k}{k}=-\sqrt{3}$

$\cos\alpha\times\sin\alpha-\tan\alpha=k\times\left(-\sqrt{3}k\right)-\left(-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}k^2+\sqrt{3}=-\sqrt{3}\left(k^2-1\right)$

Opção (A)

7. $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=a$ e $\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{14\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)=1\Leftrightarrow\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+a^2=1$$

$$\Leftrightarrow\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)=1-a^2$$

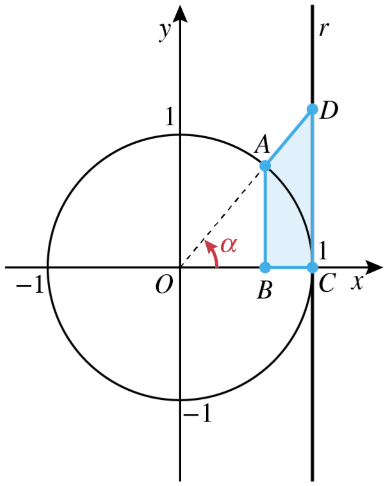
$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=\pm\sqrt{1-a^2},\quad \frac{\pi}{7}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=\sqrt{1-a^2}$$

Logo, $\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)=\sqrt{1-a^2}$.

8.

8.1. A medida da área do trapézio $[ABCD]$ é dada por:



$$A(\alpha)=\frac{\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\times\overline{BC}}{2}$$

$$A(\alpha)=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{2}\times(1-\cos\alpha)$$

$$=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{2}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

8.2. $\tan\alpha=2$

$$\tan\alpha=2\wedge\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$2^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}\quad,\quad\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

Assim, $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Como $\sin\alpha=\tan\alpha\times\cos\alpha$, então $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$A(\alpha)=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

$$A(\alpha)=\frac{2-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}=\frac{2-\frac{2}{5}}{2}=\frac{4}{5}$$

Neste caso, a medida da área é $\frac{4}{5}$.

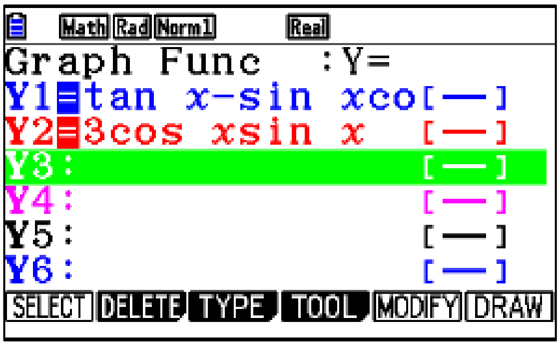
8.3. Pretendemos determinar o valor de α para o qual a medida da área do quadrilátero $[ABCD]$ é igual ao triplo da medida da área do triângulo $[ABC]$.

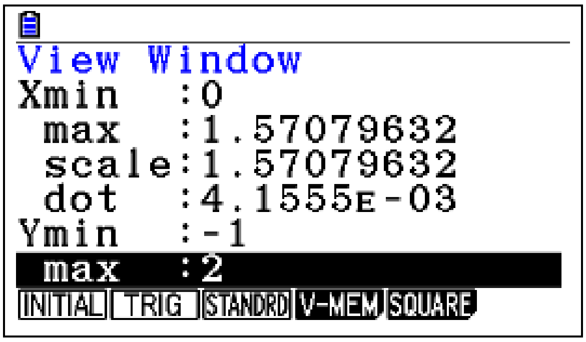
A solução do problema é o valor de $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ que é solução da equação:

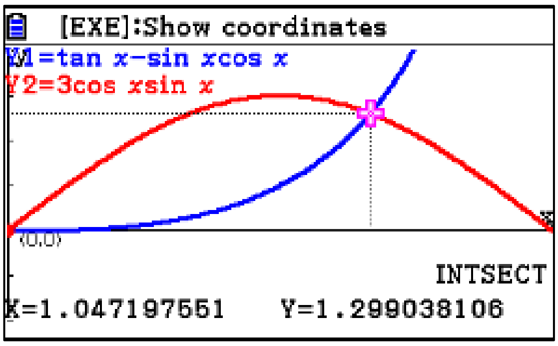
$$A(\alpha)=3\times\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}=\frac{3\cos\alpha\sin\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=3\cos\alpha\sin\alpha$$







$\alpha \approx 1,05 \text{ rad}$

9. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin(\alpha)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(\alpha)=-\frac{1}{3}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{8}{9}} \quad ,\alpha\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(-\frac{13\pi}{2}+\alpha\right)-4\tan(3\pi-\alpha)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+4\tan(\alpha)=-\cos(\alpha)+4\tan(\alpha)=$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}+4\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$

10.

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{2\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{2\sin x}{1+\cos x}$$